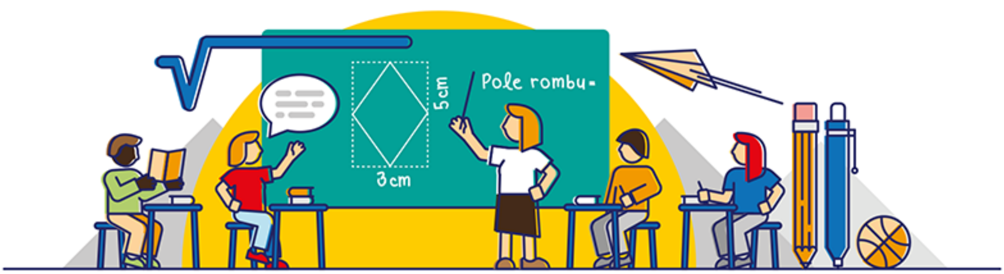
DOMOWE LEKCJE MATEMATYKI KLASY 4–6



Helion Helion EDUKACJA

Danuta Zaremba

Redaktor prowadzący: Małgorzata Kulik

Skład komputerowy w systemie LaTeX wykonała autorka.

Grafika na okładce została wykorzystana za zgodą Shutterstock.com

Helion S.A.
ul. Kościuszki 1c, 44-100 Gliwice
tel. 32 231 22 19, 32 230 98 63
e-mail: *helion@helion.pl*
WWW: *https://helion.pl* (księgarnia internetowa, katalog książek)

Drogi Czytelniku!
Jeżeli chcesz ocenić tę książkę, zajrzyj pod adres
https://helion.pl/user/opinie/dolm46
Możesz tam wpisać swoje uwagi, spostrzeżenia, recenzję.

ISBN: 978-83-283-9597-8

Printed in Poland.

Spis treści

7. Bryły

Rozdział jest przeznaczony dla wszystkich trzech klas. Zacznijmy od prostopadłościanu w klasie czwartej, w klasie piątej pokażmy graniastosłupy i ostrosłupy, a w klasie szóstej opowiedzmy o bryłach obrotowych.

W klasie czwartej, po zaznajomieniu uczniów z polem prostokąta, możemy obliczać pole powierzchni prostopadłościanu. Również w klasie czwartej możemy zacząć kształtować pojęcie objętości i obliczać objętość prostopadłościanu, odkładając na później zadania wymagające zamiany jednostek.

Relacje między jednostkami pola i tym bardziej relacje między jednostkami objętości wymagają większej wiedzy matematycznej ucznia. Zajmiemy się nimi na dobre w klasach siódmej i ósmej.

Lekcja 1. Poznajemy prostopadłościan

Celem lekcji jest zaznajomienie ucznia z prostopadłościanem. Chcemy, aby potrafił wyróżnić prostopadłościan wśród wielościanów i umiał go scharakteryzować. Na lekcji niezbędne są modele prostopadłościanu (w tym model sześcianu), a dobrze byłoby też mieć modele kilku innych wielościanów (ostrosłupów i graniastosłupów). Jako modele prostopadłościanu mogą służyć rozmaite pudełka. Nieco trudniej o modele innych wielościanów, ale na pewno coś znajdziemy.

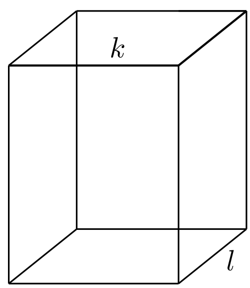
Lekcję zacznijmy od rozmowy na temat brył. Uczeń zapewne rozumie intuicyjnie to pojęcie, bo występuje ono w życiu codziennym. Porównajmy bryły z figurami płaskimi, mówiąc o obiektach płaskich i przestrzennych. Wielokąty i koła są płaskie, natomiast bryły są przestrzenne. Modelem kawałka płaszczyzny jest kartka, a modelem przestrzeni geometrycznej — przestrzeń, w której żyjemy. My, tak jak bryły, też jesteśmy „przestrzenni".

Pokażmy przygotowane modele i poinformujmy ucznia, że bryły te nazywamy wielościanami[15], w odróżnieniu na przykład od kuli czy walca. Wybierzmy prostopadłościany i zapytajmy, jakie są ich cechy charakterystyczne, tzn. cechy wyróżniające je z pozostałych wielościanów. W razie potrzeby skierujmy uwagę ucznia na wielokąty, które są ścianami brył. Chodzi o zauważenie, że wszystkie ściany prostopadłościanu są prostokątami.

Niech uczeń posłuży się modelem i opisze położenie ścian prostopadłościanu. Myślę, że nie będzie miał problemu z przeniesieniem pojęcia równoległości i prostopadłości z prostych na płaszczyzny, bez kłopotu wskaże pary ścian równoległych i pary ścian prostopadłych.

Warto policzyć wierzchołki i krawędzie prostopadłościanu, przy czym można zachęcić ucznia, aby spróbował to zrobić bez patrzenia na model.

Przy okazji wskazywania krawędzi równoległych i prostopadłych zwróćmy uwagę na krawędzie nieleżące w jednej płaszczyźnie:



[15] Analogicznie do wieloboków.

Aby się przekonać, że nie ma płaszczyzny zawierającej krawędzie k i l, potrzeba trochę wyobraźni. Niech uczeń wyobrazi sobie dowolną płaszczyznę (kartkę) przechodzącą przez krawędź k i zmienia jej położenie (obraca kartkę), nie rezygnując z zawierania k. Widać, że nie można nadać płaszczyźnie takiego położenia, aby znalazła się na niej także krawędź l.

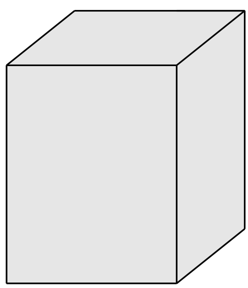
Poinformujmy ucznia, że proste nieleżące w jednej płaszczyźnie nazywamy skośnymi[16].

Porozmawiajmy o tym, że często wygodnie jest wyróżnić w prostopadłościanie podstawy i ściany boczne. Jest to naturalne dopiero po postawieniu prostopadłościanu, na przykład na stole lub dłoni. Oczywiście wszystkie ściany są równouprawnione — każda może być podstawą i każda ścianą boczną. Pojęcia te wskazują na położenie prostopadłościanu, a nie są związane z samą bryłą.

Niech uczeń znajdzie wśród modeli taki prostopadłościan, którego wszystkie ściany są kwadratami. Poinformujmy, że takie prostopadłościany nazywamy sześcianami. Zapytajmy o sześciany w życiu codziennym — klasycznym przykładem jest kostka do gry (o ile nie ma zaokrągleń przy wierzchołkach). Jak wiadomo, nazwa „sześcian” nie jest zbyt trafna, mówi tylko o liczbie ścian, a nie o tym, jakie one są. Uczeń stykający się z tą nazwą po raz pierwszy, może się zdziwić, że nie każdy prostopadłościan jest sześcianem: „Jak to? Przecież ma sześć ścian!”.

Dopóki posługujemy się modelami prostopadłościanu, lekcja przebiega na ogół gładko. Trudności mogą pojawić się wtedy, kiedy modele zastąpimy rysunkami. Dwa pierwsze ćwiczenia służą sprawdzeniu, czy uczeń potrafi odczytać rysunek.

Ćwiczenie 1. Ile ścian widać na rysunku prostopadłościanu? Ile ścian jest niewidocznych? Określ ich położenie. Ilu krawędzi nie widać? A ile wierzchołków jest niewidocznych?



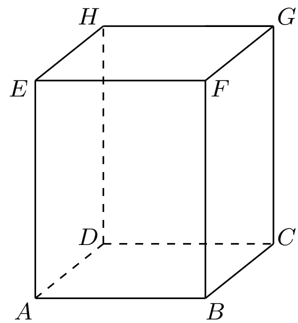
[16] Potoczne znaczenie tej nazwy jest inne — oznacza ono nachylenie pod kątem ostrym.

Zgodnie z niepisaną umową krawędzie niewidoczne rysujemy na ogół liniami przerywanymi.

Ćwiczenie 2. Posługując się literami:

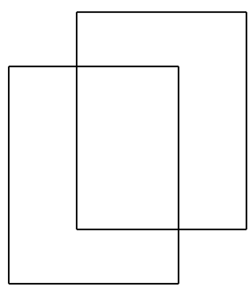
a) wybierz jedną z krawędzi prostopadłościanu i wypisz krawędzie do niej równoległe,

b) wybierz jedną ze ścian prostopadłościanu i wypisz ściany do niej prostopadłe.



Niektórzy uczniowie mają trudności z rysowaniem, dajmy im czas na samodzielne próby. Nie narzucajmy sposobu rysowania, ograniczmy się do wskazywania ewentualnych błędów i niezręczności, a także nieco podpowiadajmy. Niech uczeń korzysta z modeli prostopadłościanu i ustawia je tak, aby było widać jak najwięcej ścian.

W razie problemów można poradzić, aby zaczynać od dwóch ścian równoległych — przedniej i tylnej:



Potem pozostaje tylko połączyć odpowiednie wierzchołki. To bardzo sprytny sposób, podpatrzyłam go u innych nauczycieli.

Lekcja 2. Sporządzamy siatkę prostopadłościanu

Oprócz rysowania prostopadłościanów uczymy także sporządzać ich siatki. Sporządzanie siatek kształci wyobraźnię geometryczną i dlatego jest ważne *z matematycznego punktu widzenia. Wpływa też korzystnie na rozwój sprawności manualnych.*

Trzeba uczniowi dokładnie wytłumaczyć, na czym polega sporządzanie siatki. Można zacząć od zadania zrobienia modelu prostopadłościanu z papieru, co sprowadza się do narysowania i wycięcia prostokątów, które będą ścianami prostopadłościanu. Jeżeli prostokąty te narysujemy tak, aby były „w jednym kawałku”, to utworzoną przez nie figurę nazywamy siatką.

Tak postawione zadanie może okazać się zbyt trudne. Łatwiej jest przejść od modelu do jego siatki. W tym celu warto przeznaczyć do ewentualnego rozcięcia i spłaszczenia jakieś tekturowe pudełko, przy czym rozcinać je będziemy wzdłuż krawędzi. Zapytajmy, jak to robić, aby tektura pozostała w jednym kawałku.

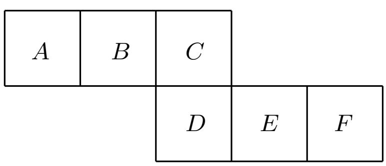
Lepiej wziąć pudełko bez pokrywki, bo wtedy łatwiej można sobie wyobrazić jego rozcinanie i spłaszczanie. Może się to skojarzyć z rozwijaniem się płatków korony kwiatu. Uczeń dostrzeże, że pudełko wystarczy rozciąć wzdłuż pionowych krawędzi i rozłożyć ściany boczne. Będzie to siatka prostopadłościanu bez jednej ściany, którą to ścianę trzeba potem dorysować.

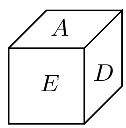
Z siatki można złożyć prostopadłościan, używając na przykład taśmy klejącej. Kiedyś robiło się tzw. wypustki, ale raczej na zajęciach praktycznych niż na lekcji matematyki. Do celów matematyki łączenie ścian najczęściej jest niepotrzebne — wystarczy tylko pozaginać krawędzie.

Jak wiadomo, siatkę prostopadłościanu można sporządzić na wiele sposobów. Niech uczeń robi to tak, jak mu wygodnie.

Zadania

1. Rysunek przedstawia sześcian i jego siatkę:





Podaj, jakie litery są przyporządkowane niewidocznym ścianom sześcianu.
⟨W razie trudności można z podanej siatki sporządzić model.⟩

2. Narysuj kilka różnych siatek sześcianu.
⟨Jest co najwyżej 11 możliwości.⟩

3. Pomyłek rozumuje: „Prostopadłościan ma 8 wierzchołków, z każdego wychodzą 3 krawędzie, więc razem są 24 krawędzie”. Czy rzeczywiście? ⟨Pomyłek liczy każdą krawędź podwójnie.⟩

Lekcja 3. Obliczamy pole powierzchni prostopadłościanu

Na lekcji warto poświęcić parę słów na wyjaśnienie terminologii, która nie jest jednoznaczna. Termin „powierzchnia” nie zawsze oznacza pewien obszar. Bywa używany także w znaczeniu pola tego obszaru, a więc czasem oznacza liczbę. Tak z reguły jest w życiu codziennym. Nie prowadzi to do nieporozumień, gdyż zawsze jest jasne, o jakie znaczenie chodzi.

Pokażmy na modelu, co się rozumie przez powierzchnię prostopadłościanu. Przy okazji warto uogólnić pojęcie powierzchni na dowolny wielościan, również przy użyciu modeli.

Uczeń widzi, że na powierzchnię prostopadłościanu składa się sześć prostokątów będących jego ścianami. Pole powierzchni jest więc sumą pól poszczególnych ścian.

Do takiego wniosku można dojść również na podstawie siatki prostopadłościanu.

Nie formułujmy żadnych ogólnych wzorów. Są one niepotrzebne, a czasami wręcz szkodliwe. Niech uczeń szuka najprostszych sposobów obliczania pola powierzchni. Sprawdźmy, czy dostrzeże, że pole każdej ściany występuje co najmniej dwa razy, co warto wykorzystać w obliczeniach.

Przed przystąpieniem do obliczeń trzeba przypomnieć, że pole wyrażamy w jednostkach kwadratowych.

Ćwiczenie 1. Weź do ręki model prostopadłościanu i zastanów się, jak obliczysz pole jego powierzchni. Które odcinki zmierzysz? Jak będziesz obliczać, aby ułatwić sobie pracę? A jak będziesz obliczać, jeżeli prostopadłościan jest sześcianem?

W ćwiczeniu 1 zapewne pojawią się dwa sposoby obliczania. Niektórzy mogą chcieć obliczyć sumę podwojonych pól trzech ścian. Sprytniejsi zauważą, że wykonamy mniej działań, jeżeli najpierw dodamy pola trzech ścian, a potem podwoimy wynik.

Obserwacje poczynione w ćwiczeniu 1 przydadzą się w dwóch kolejnych ćwiczeniach.

Ćwiczenie 2. Oblicz pole powierzchni prostopadłościanu, którego trzy ściany mają pola: 13 cm^2, 26 cm^2, 8 cm^2.

Ćwiczenie 3. Oblicz pole powierzchni:

a) prostopadłościanu o krawędziach 4 cm, 5 cm i 7 cm,

b) sześcianu o krawędzi 3 cm.

Ćwiczenie 4. Oblicz pole powierzchni sześcianu o krawędzi 7 cm.

Wynik ćwiczenia 4 można znaleźć w pamięci: 7 razy 7 to 49, a 6 razy 49 to 6 razy 50 minus 6. Do obliczeń pamięciowych zawsze warto zachęcać.

W dotychczasowych zadaniach była mowa o polu powierzchni całkowitej prostopadłościanu. Teraz będziemy obliczać pole powierzchni częściowej, co bywa potrzebne w życiu codziennym. Kiedy obliczamy ilość farby potrzebnej na pomalowanie czterech ścian pokoju, bierzemy pod uwagę tylko powierzchnię boczną. Warto podyskutować o sposobach jej obliczania. Standardowy sposób polega na dodaniu pól ścian bocznych. Wykonujemy wtedy dwa mnożenia (pola dwóch różnych ścian), jedno dodawanie i jedno mnożenie przez 2. Zapytajmy, czy można zmniejszyć liczbę działań. Chodzi o to, aby uczeń wyobraził sobie ściany boczne ustawione jedna obok drugiej, tak aby tworzyły prostokąt. Wtedy wystarczy obliczyć pole tego prostokąta, co sprowadza się do obliczenia obwodu podłogi i pomnożenia go przez wysokość pokoju.

Okazję do takich rozważań mamy w ostatnim ćwiczeniu.

Ćwiczenie 5. Łazienka ma kształt prostopadłościanu o wysokości 3 m i wymiarach podstawy 4 m na 2 m. Drzwi do łazienki mają szerokość 1 m i wysokość 2 m. Ile metrów kwadratowych kafli potrzeba na pokrycie ścian tej łazienki?

W ćwiczeniu 5 dajmy uczniowi swobodę w obliczeniach. W końcowym momencie warto jednak zauważyć, że powierzchnię ścian łazienki najprościej obliczyć tak:

$$2 \cdot (4+2) = 12 \text{ (obwód podłogi)}, \quad 12 \cdot 3 = 36 \text{ (powierzchnia boczna)}.$$

Trzeba też wspomnieć o praktycznej stronie tego zadania: kafle kupujemy z pewnym zapasem.

Zadania

1. Oblicz, ile szkła jest w akwarium, którego wysokość wynosi 30 cm, a dno ma wymiary 30 cm na 40 cm.

2. Oblicz pole powierzchni sześcianu o krawędzi 5 cm.
3. Oblicz sumę krawędzi sześcianu, którego pole powierzchni jest równe 96 cm^2.
   ⟨Zacznij od obliczenia pola jednej ściany.⟩
4. Sześcian, którego pole powierzchni jest równe 24 cm^2, rozcięto na dwa jednakowe prostopadłościany. Oblicz pole powierzchni jednego prostopadłościanu.
   ⟨Nie jest ono dwa razy mniejsze!⟩
5. Długość pokoju jest równa 4 m, szerokość 5 m, a wysokość 3 m. W pokoju są dwa okna, każde o wymiarach 1 m na 1 m oraz drzwi o szerokości 1 m i wysokości 2 m. Lokator chce pomalować sufit i ściany. Jaka powierzchnia jest do pomalowania?

Lekcja 4. Obliczamy objętość prostopadłościanu

Jest to pierwsza lekcja, na której pojawia się termin „objętość”. Wprowadzając go, warto nawiązać do doświadczeń ucznia związanych z pojemnością, występującą w życiu codziennym. Przy okazji objętości sześcianu wprowadźmy pojęcie sześcianu liczby.

Uczeń kojarzy pojemność z ilością materiału, najczęściej płynu, którą można zmieścić w naczyniu (pojemniku) wypełnionym po brzegi. Dobrze będzie zapytać o kilka przykładów posługiwania się pojemnością, zwracając uwagę, że zwykle określa się ją w litrach.

Zauważmy, że pojemność jest w istocie synonimem objętości, przy czym pojemność jest atrybutem pojemnika, a objętość zwykle dotyczy tego, co w nim jest — na przykład wody czy powietrza. Dobrze obrazuje to przykład wzięty z medycyny, w którym określa się pojemność płuc jako objętość powietrza w nich zawartego.

Poinformujmy ucznia, że w matematyce używamy wyłącznie terminu „objętość” i odnosimy go do brył.

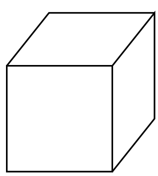
Wspólnie z uczniem zastanówmy się, jak można zmierzyć objętość prostopadłościanu. Do problemu podejdźmy czynnościowo, podobnie jak to robiliśmy przy mierzeniu pola prostokąta. Wymaga to trochę zachodu, ale na pewno się opłaci. Postarajmy się o model prostopadłościanu, pusty wewnątrz, z otwieraną ścianą lub nawet bez jednej ściany, oraz jednakowe kostki sześcienne o krawędzi tak dobranej, aby mieściła się całkowitą liczbę razy w każdej krawędzi prostopadłościanu. Chodzi o to, aby na początkowym etapie kształtowania pojęcia objętości uniknąć ułamków. Polećmy rozpocząć wypełnianie prostopadłościanu kostkami i postawmy zadanie obliczenia, ile kostek do tego potrzeba. Niektórzy uczniowie potrafią sobie wyobrazić układanie kostek w prostopadłościanie, inni potrzebują rzeczywiście je układać, przynajmniej częściowo. Naturalne jest układanie kostek warstwami (poziomymi). Podczas wypełniania dolnej warstwy rzędami kostek zapytajmy, ile kostek zmieści się w jednej warstwie. Uczeń zapewne będzie wiedział, że trzeba pomnożyć liczbę rzędów przez liczbę kostek w rzędzie. Następnie zapytajmy, jak obliczyć liczbę kostek potrzebnych do wypełnienia całego prostopadłościanu. Spodziewamy się odpowiedzi, że trzeba pomnożyć liczbę kostek w jednej warstwie przez liczbę warstw. A jak sprawdzić, ile będzie warstw? Wyobrażając sobie układanie kolejnych warstw, uczeń spostrzeże, że jest ich tyle, ile kostek mieści się pionowo, jedna na drugiej.

Następne zadanie będzie trudniejsze. Tym razem zapytajmy, jak obliczyć liczbę kostek sześciennych potrzebnych do wypełnienia ustalonego prostopadłościanu, wykorzystując długość krawędzi kostki. Narysujmy odcinek, który będzie reprezentował krawędź sześcianu. Przygotujmy cienki sznurek i zasugerujmy posłużenie się nim. Analogiczne ćwiczenia były robione podczas obliczania pola prostokąta (rozdział 6, lekcja 1).

Uczeń zapewne zauważy, że aby obliczyć liczbę sześcianów potrzebnych do wypełnienia pojedynczej warstwy, trzeba zbadać, ile razy krawędź sześcianu mieści się w krawędziach podstawy prostopadłościanu. Odmierzy na sznurku długość krawędzi sześcianu i tak przygotowaną jednostką wymierzy krawędzie podstawy prostopadłościanu. Aby znaleźć liczbę warstw, wymierzy tą samą jednostką trzecią krawędź prostopadłościanu.

Stąd już tylko krok do zauważenia, że liczba sześcianów w prostopadłościanie jest iloczynem długości jego krawędzi, mierzonych krawędzią sześcianu. Poinformujmy, że ta liczba to właśnie objętość prostopadłościanu wyrażona w danej jednostce sześciennej. Istotne jest, aby uczeń rozumiał związek między jednostką objętości a jednostką długości, którą mierzymy krawędzie prostopadłościanu. Na początku lepiej nie używać jednostek standardowych. Niech to będzie dowolnie ustalona jednostka długości i odpowiadająca jej jednostka objętości:

jednostka długości



jednostka objętości

Po ćwiczeniach manipulacyjnych przystępujemy do obliczeń, nie formułując przy tym ogólnego wzoru na objętość prostopadłościanu. Na początku ograniczmy się do prostopadłościanów o wymiarach całkowitych.

W ćwiczeniach 1 i 3 zadbajmy, aby uczeń nie zapomniał określić objętości w jednostkach sześciennych.

Ćwiczenie 1. Oblicz objętość prostopadłościanu o krawędziach 4, 6 i 8 jednostek.

Ćwiczenie 2. Oblicz, ile sześcianów o krawędzi 2 cm zmieści się w prostopadłościanie o krawędziach 8 cm, 12 cm, 14 cm.

Ćwiczenie 3. Oblicz objętość sześcianu o krawędzi 5 jednostek.

W ćwiczeniu 3 — jak zawsze przy obliczaniu objętości sześcianu — pojawia się iloczyn trzech jednakowych czynników. Przy tej okazji wprowadźmy określenie podnoszenia do sześcianu, w wyniku którego otrzymujemy sześcian liczby:

$$5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3.$$

Nawiążmy do kwadratu liczby, który zdefiniowaliśmy przy obliczaniu pola kwadratu (rozdział 6, lekcja 1).

Możemy ewentualnie uogólnić te dwie definicje na dowolną liczbę czynników, wspominając o potęgowaniu, ale równie dobrze możemy z tym poczekać do klasy siódmej, w której będzie o tym mowa.

Lekcja 5. Poznajemy standardowe jednostki objętości

Kiedy uczeń zrozumie pojęcie objętości i przyswoi sobie sposób jej obliczania, przejdźmy do jednostek standardowych, co jest ważne z praktycznego punktu widzenia. Pamiętajmy, że jednostki objętości są trudniejsze od jednostek kwadratowych. Trzeba więcej czasu, aby uczeń nabrał orientacji w jednostkach sześciennych.

Na początku poinformujmy, że symbole jednostek sześciennych nawiązują do sześcianu liczby: cm^3, m^3 itp. Podkreślmy jednak, że występująca tu liczba 3 nie oznacza mnożenia trzech czynników. W matematyce nie ma działania $\text{cm} \cdot \text{cm} \cdot \text{cm}$ czy $\text{m} \cdot \text{m} \cdot \text{m}$.

Starajmy się kształcić orientację w wielkościach i wzajemnych relacjach różnych jednostek sześciennych. Niech uczeń sporządzi model decymetra sześciennego (poinformujmy, że to jest właśnie 1 litr) i centymetra sześciennego, niech wyobrazi sobie metr sześcienny. Pomoże to w zamianie jednych jednostek objętości na inne. Zamiana ta jest trudna, będziemy ją ćwiczyć na późniejszych etapach edukacji, ale zacząć możemy już teraz.

Ćwiczenie 1. Posługując się modelami decymetra sześciennego i centymetra sześciennego, zastanów się, jaką liczbę wpisać w miejsce wielokropka:

$$1\ \mathrm{dm}^3 = \ldots\ \mathrm{cm}^3.$$

W ćwiczeniu 1 uczeń powinien sobie wyobrazić wypełnianie decymetra sześciennego sześcianami o boku 1 cm^3.

Przed ćwiczeniem 2 trzeba podać informację, że 1 litr to 1 dm^3, i sprawdzić, czy uczeń wie, jak zamienić litr na centymetry sześcienne.

Ćwiczenie 2. Podstawa prostopadłościennego akwarium ma wymiary 40 cm i 50 cm, a jego wysokość jest równa 40 cm. Czy woda wypełniająca to akwarium do połowy wysokości zmieści się w 25-litrowym wiadrze?

W ćwiczeniu 2 można zamienić 25 litrów na centymetry sześcienne lub wyrazić obliczoną objętość w decymetrach sześciennych.

Ćwiczenie 3. Suma krawędzi sześcianu jest równa 42 cm. Oblicz objętość sześcianu.

Ćwiczenie 4. Oblicz pole powierzchni sześcianu, którego objętość wynosi 64 cm^3.

Zadania

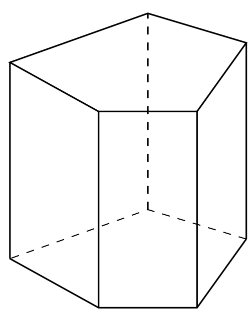
1. Pole powierzchni sześcianu jest równe 150 cm^2. Oblicz objętość tego sześcianu.
2. Objętość prostopadłościanu wynosi 120 cm^3, a dwie jego krawędzie mają długości 3 cm i 5 cm. Oblicz długość trzeciej krawędzi.
3. Dwa jednakowe sześciany o krawędzi 2 cm sklejono ścianami. Oblicz objętość i pole powierzchni powstałej bryły.
4. Najdłuższa krawędź prostopadłościanu jest o 5 cm dłuższa od najkrótszej, a średnia krawędź jest o 2 cm dłuższa od najkrótszej. Suma trzech różnych krawędzi jest równa 52 cm. Oblicz objętość prostopadłościanu.
   ⟨O ile trzeba skrócić średnią krawędź, a o ile najdłuższą, aby były one takie jak krawędź najkrótsza? Ile wtedy wyniesie ich suma?⟩
5. Czy 2 litry płynu zmieszczą się w prostopadłościennym pojemniku o wymiarach 8 cm, 10 cm i 24 cm?
   ⟨Zamień 2 litry na centymetry sześcienne.⟩

6. Mosiężna sztabka o wymiarach 5 cm, 5 cm, 20 cm waży 4 kg 250 g. Ile waży 1 cm^3 mosiądzu?

Lekcja 6. Poznajemy graniastosłupy

Uogólnimy pojęcie prostopadłościanu na graniastosłup. Zaznajomimy ucznia z siatkami graniastosłupów. Będziemy znajdować związki między liczbą ścian, krawędzi i wierzchołków danego graniastosłupa, co rozwija wyobraźnię geometryczną i uczy myślenia. W trakcie lekcji dobrze byłoby zaprezentować modele różnych graniastosłupów. To nie tylko ułatwia mówienie o tych bryłach, ale także umożliwia uczniowi bezpośrednie dostrzeganie ich własności. Modelami graniastosłupa mogą być m.in. bardziej wymyślne pudełka, plaster miodu lub ostrokątny, niezatemperowany ołówek.

Zacznijmy od przypomnienia, jak wygląda prostopadłościan. Weźmy do ręki jego model. Ponieważ wszystkie ściany są „równouprawnione”, więc nie ma sensu mówić o ścianach bocznych czy podstawach, dopóki prostopadłościanu nie postawimy. Postawmy go na stole. Niech uczeń opisze prostopadłościan, scharakteryzuje jego podstawy (górną i dolną) i ściany boczne. Następnie powiedzmy, aby wyobraził sobie bryłę, która jako podstawę (górną i dolną) może mieć dowolny wielokąt, niekoniecznie prostokąt. Podstawą może być dowolny trójkąt, czworokąt, pięciokąt itd., a ściany boczne są nadal prostokątami. Ograniczymy się do przypadku, kiedy ściany boczne są prostopadłe do podstaw[17]. Powiedzmy, że takie bryły nazywamy graniastosłupami. Dobrze będzie w tym momencie pokazać model graniastosłupa, który nie jest prostopadłościanem.



Uczeń zauważy, że graniastosłup, który nie jest prostopadłościanem, ma w sposób naturalny wyróżnione dwie ściany: wielokąty, które nie są prostokątami. Tradycyjnie nazywamy je podstawami graniastosłupa. Ściany boczne

[17] Tylko takie graniastosłupy, tzw. graniastosłupy proste, są w programie szkoły podstawowej.

takiego graniastosłupa są wyznaczone jednoznacznie, niezależnie od jego położenia w przestrzeni. Spytajmy, ile jest ścian bocznych, jeśli podstawą graniastosłupa jest trójkąt, czworokąt, pięciokąt itd. A ile jest wtedy wszystkich ścian?

Teraz będziemy obliczać liczbę ścian, krawędzi i wierzchołków różnych graniastosłupów. Zacznijmy od małych liczb, które uczeń może odczytywać z modeli, a potem przejdźmy do takich graniastosłupów, które musi sobie wyobrazić. Tego rodzaju ćwiczenia nie tylko rozwijają widzenie przestrzenne, ale także stwarzają okazję do przekonywania i uzasadniania. Nie żałujmy na nie czasu.

Ćwiczenie 1. Ile ścian, krawędzi i wierzchołków ma graniastosłup, którego podstawą jest: a) trójkąt, b) pięciokąt?

Ćwiczenie 2. Wyobraź sobie graniastosłup, którego podstawą jest ośmiokąt. Ile ścian ma ten graniastosłup? Ile ma krawędzi? A ile wierzchołków?

Ćwiczenie 3. Jaki wielokąt jest podstawą graniastosłupa o 12 ścianach? Ile krawędzi bocznych ma ten graniastosłup? A ile wierzchołków?

Ćwiczenie 4. Ile wierzchołków ma graniastosłup, którego podstawą jest stukąt?

Jeśli uczeń dobrze radzi sobie z ćwiczeniami, niech spróbuje w sposób ogólny podać związki między liczbą boków wielokąta, który jest podstawą graniastosłupa, a liczbą ścian, krawędzi i wierzchołków. Możemy też spytać o związek między liczbą wszystkich ścian graniastosłupa i liczbą jego ścian bocznych.

W drugiej części lekcji zajmijmy się siatkami graniastosłupów. Podobnie jak w przypadku siatki prostopadłościanu, uczniowi będzie łatwiej wyobrazić sobie siatkę graniastosłupa bez górnej podstawy. Jeśli mamy odpowiednie pudełko o podstawie, która jest trójkątem, pięciokątem bądź sześciokątem, to możemy je rozciąć wzdłuż krawędzi bocznych i rozłożyć na płasko. Myślę jednak, że nie jest to konieczne, jeśli uczeń pamięta, jak robił siatkę prostopadłościanu. Wtedy zastąpi podstawę danym wielokątem i dorysuje tyle jednakowych prostokątów, ile boków ma ten wielokąt. Na końcu pozostanie doczepienie górnej podstawy do jednego z prostokątów.

Sprawdźmy, czy uczeń poradzi sobie z narysowaniem siatki graniastosłupa, którego podstawa jest wielokątem różnym od prostokąta.

Ćwiczenie 5. Narysuj siatkę graniastosłupa, którego podstawa jest trójkątem o różnych bokach.

Zadania

1. Ile wierzchołków ma graniastosłup, którego podstawą jest dwudziestokąt? Ile ma ścian i ile krawędzi?

2. Jaka jest najmniejsza możliwa liczba wierzchołków graniastosłupa? Ile ścian, a ile krawędzi ma taki graniastosłup?

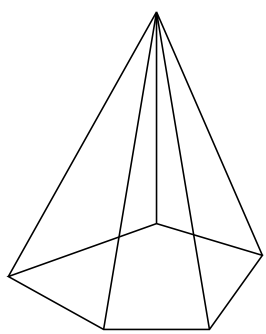
3. Jaki wielokąt jest podstawą graniastosłupa o 12 wierzchołkach?

4. Ile krawędzi ma graniastosłup o 11 ścianach?

Lekcja 7. Poznajemy ostrosłupy

Na lekcji opowiemy o ostrosłupach. Jak wiadomo, najlepszymi modelami ostrosłupa są piramidy egipskie. Dobrze byłoby mieć modele ostrosłupów o różnych podstawach, w tym model czworościanu. Zaznajomimy ucznia z siatkami ostrosłupów. Będziemy znajdować związki między liczbą ścian i krawędzi ostrosłupa a liczbą boków wielokąta, który jest jego podstawą.

Uczeń zapewne wie, jak wyglądają egipskie piramidy — może spróbuje je opisać? Są wśród nich większe i mniejsze, ale wszystkie mają ten sam kształt. Podstawa piramidy jest kwadratem, a ściany boczne są trójkątami. Po tym wstępie z piramidami niech uczeń wyobrazi sobie bryłę, której ściany boczne też są trójkątami, ale podstawa niekoniecznie jest kwadratem — może być dowolnym wielokątem. Powiedzmy, że taką bryłę nazywamy ostrosłupem. Pokażmy modele, jeśli mamy.



Ćwiczenie 1. Wyobraź sobie ostrosłup, którego podstawą jest siedemnastokąt. Ile wszystkich ścian ma ten ostrosłup? Ile ma wszystkich krawędzi?

O wierzchołkach ostrosłupa raczej nie mówimy. Wyróżniamy tylko jeden wierzchołek, ten naprzeciwko podstawy.

Ćwiczenie 2. Ostrosłup ma 25 wszystkich ścian. Ile ma krawędzi bocznych? Jakim wielokątem jest podstawa ostrosłupa?

Następnie możemy przystąpić do omawiania siatki ostrosłupa. Jest ona łatwiejsza do wyobrażenia niż siatka graniastosłupa. Uczeń zdaje sobie sprawę, że jak rozetniemy ostrosłup wzdłuż krawędzi bocznych i spłaszczymy, to otrzymamy figurę podobną do gwiazdy.

Ćwiczenie 3. Narysuj siatkę ostrosłupa, którego podstawą jest kwadrat, a ściany boczne są trójkątami równoramiennymi.

Podstawą ostrosłupa może być też trójkąt. Zapytajmy, ile ścian ma ten ostrosłup, a po uzyskaniu odpowiedzi powiedzmy, że nazywamy go czworościanem. Zwróćmy uwagę, że żadna ze ścian czworościanu nie jest wyróżniona, każda może być podstawą. Dobrze byłoby pokazać model.

Zadania

1. Ostrosłup ma 20 wszystkich krawędzi. Jakim wielokątem jest podstawa tego ostrosłupa?
2. Ile krawędzi ma ostrosłup mający:
   a) 11 ścian bocznych, b) 11 wszystkich ścian?
3. Narysuj siatkę ostrosłupa, którego podstawą jest kwadrat o boku 4 cm, a ściany boczne są trójkątami równoramiennymi o wysokości 5 cm.

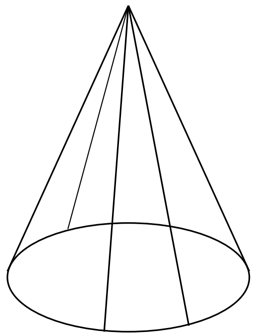
Lekcja 8. Poznajemy bryły obrotowe

Zajmiemy się powszechnie znanymi przykładami brył obrotowych: walcem, stożkiem i kulą. Pokażemy, jak można je otrzymać w wyniku obrotu figur płaskich.

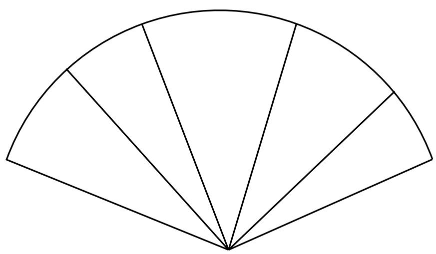
Zwróćmy uwagę, że do tej pory zajmowaliśmy się bryłami, których wszystkie ściany były wielokątami. Teraz będzie przeciwnie, bo będziemy mówić o bryłach, których żadna ściana nie jest wielokątem. Do takich brył należą m.in. walec, stożek i kula. Kształty te są uczniowi znane, występują w życiu codziennym. Poszukajmy wspólnie przykładów.

Możemy spróbować sporządzić modele walca i stożka. Z walcem nie jest trudno — uczeń zapewne zwinie papier w rurkę i dołączy do niej dwa koła. Zdaje sobie sprawę, że ściana boczna walca po rozcięciu i spłaszczeniu jest prostokątem.

Znacznie trudniej jest sporządzić model stożka, bo nie od razu widać, z jakiej figury płaskiej tworzy się jego powierzchnię boczną. Niektórzy myślą, że z trójkąta. Tymczasem tak nie jest, bo wszystkie punkty obwodu podstawy stożka są równo oddalone od wierzchołka stożka:



A w jakiej figurze płaskiej można zrealizować tę własność? Jaki kształt musi mieć linia, z której zrobimy obwód podstawy, skoro wszystkie jej punkty mają być równo oddalone od jednego punktu? Pomóżmy zauważyć, że musi to być część okręgu, więc ściana boczna stożka po rozwinięciu jest wycinkiem koła:



Trzecia bryła, kula, jest dobrze znana uczniom. Wiele przedmiotów ma kształt kuli. Poinformujmy, że kula, w odróżnieniu od dwóch poprzednich brył, nie daje się złożyć z figur płaskich.

Pokażmy, że wszystkie trzy bryły można otrzymać w wyniku obrotu figur płaskich. W tym celu wytnijmy z kartonu prostokąt, trójkąt prostokątny oraz półkole i zademonstrujmy obroty: prostokąta wokół boku, trójkąta prostokątnego wokół przyprostokątnej oraz półkola wokół średnicy[18]. W ten sposób uzasadnimy nazwę bryły **obrotowe**.

[18] Można także obracać prostokąt, trójkąt równoramienny i koło wokół ich osi symetrii.

TWOJE DZIECKO WRESZCIE ZROZUMIE MATEMATYKĘ!

Matematyka z natury rzeczy nie jest łatwa. Dla wielu to najtrudniejszy przedmiot w szkole. Sprawia problemy nie tylko uczniom, ale także tym, którzy jej uczą. Niełatwo przygotować lekcje tak, aby uczynić zrozumiałym to, co trudno zrozumieć. Autorka przekonała się o tym w czasie swojej pracy jako nauczycielka, a teraz swoimi pomysłami dzieli się z czytelnikami, proponując scenariusze lekcji w szkole podstawowej. Zgromadzony tu materiał jest zgodny z podstawą programową nauczania matematyki w szkole podstawowej.

Domowe lekcje matematyki to propozycja dla opiekunów, którzy chcą pomóc dzieciom w nauce tego przedmiotu. Każdej lekcji towarzyszą starannie dobrane do danego tematu ćwiczenia, za pomocą których autorka pokazuje, w jaki sposób rozmawiać z podopiecznym i jakie pytania mu zadawać, aby dostrzegł istotę omawianego zagadnienia. A w efekcie – zrozumiał matematykę, bo, jak twierdzi francuski filozof Alain Badiou, „bez matematyki jesteśmy ślepi".

ARYTMETYKA LICZB NATURALNYCH

DŁUGOŚĆ I KĄTY

UŁAMKI ZWYKŁE I DZIESIĘTNE

TRÓJKĄTY, CZWOROKĄTY I WIELOKĄTY

BRYŁY

LICZBY UJEMNE I DODATNIE

ELEMENTY ALGEBRY

Helion EDUKACJA

Helion

helion.pl

HELION SA
ul. Kościuszki 1c
44-100 Gliwice
tel.: 32 230 98 63
helion@helion.pl

KOD KORZYŚCI
Sięgnij po więcej!

ISBN 978-83-283-9597-8

9 788328 395978

Cena: 39,90 zł