Jak

SIĘ NIE POMYLIĆ

czyli

POTĘGA
MATEMATYCZNEGO MYŚLENIA

JORDAN
ELLENBERG

Tytuł oryginału: How Not to Be Wrong: The Power of Mathematical Thinking

Tłumaczenie: Marcin Machnik

ISBN: 978-83-283-3262-1

Wydawnictwo HELION
ul. Kościuszki 1c, 44-100 GLIWICE
tel. 32 231 22 19, 32 230 98 63
e-mail: *helion@helion.pl*
WWW: *http://helion.pl* (księgarnia internetowa, katalog książek)

Printed in Poland.

SPIS TREŚCI

CZĘŚĆ III

Oczekiwania

CZĘŚĆ IV

Regresja

CZĘŚĆ V

Egzystencja

KIEDY W OGÓLE TEGO UŻYJĘ?

W tej chwili w sali wykładowej gdzieś na świecie jakaś studentka klnie pod nosem na swojego nauczyciela matematyki, przez którego będzie musiała poświęcić znaczną część weekendu na obliczenie trzydziestu całek oznaczonych.

Nasza uczennica z całą pewnością wolałaby zająć się czymś innym. Można nawet zaryzykować stwierdzenie, że wolałaby zająć się *czymkolwiek*, byle nie tym. Wie to, bo znaczną część poprzedniego weekendu spędziła na obliczaniu innych — chociaż tak naprawdę bardzo podobnych — trzydziestu całek oznaczonych. Nie widzi w tym żadnego sensu, co też mówi swojemu nauczycielowi. I w którymś momencie ich wymiany zdań pada to najbardziej przerażające dla wykładowcy pytanie:

— *Kiedy w ogóle tego użyję?*

Wykładowca przypuszczalnie odpowie coś takiego:

— Rozumiem, że cię to nudzi, ale pamiętaj, że nigdy nie wiadomo, do jakiej pracy trafisz. Teraz nie widzisz w tym sensu, ale być może wybierzesz branżę, w której umiejętność szybkiego i poprawnego obliczania całek oznaczonych jest niezwykle ważna.

Taka odpowiedź prawdopodobnie nie usatysfakcjonuje studentki. To dlatego, że jest kłamstwem. Zarówno ona, jak i nauczyciel zdają sobie z tego sprawę. Dorosłych, którym przyda się całka z $(1-3x+4x^2)^{-2}dx$, wzór na $\cos 3\theta$ lub syntetyczne dzielenie wielomianów, można policzyć na paru tysiącach rąk.

To kłamstwo nie jest też specjalnie satysfakcjonujące dla nauczyciela. Kto jak kto, ale ja powinienem to wiedzieć, bo jako wykładowca matematyki zadałem liczenie całek oznaczonych setkom studentów.

Na szczęście istnieje lepsza odpowiedź. Brzmi ona mniej więcej tak:

— Matematyka nie polega na przeprowadzaniu do upadłego serii żmudnych obliczeń, chociaż można odnieść takie wrażenie na podstawie odbytych przez was lekcji zwanych *matematyką*. Całki są dla matematyki tym, czym trening siłowy i kalistenika dla piłki nożnej. Jeśli chcesz grać w piłkę nożną — ale tak *na serio*, na zawodowym poziomie — czeka cię mnóstwo nudnych, powtarzalnych i pozornie bezcelowych ćwiczeń. Czy zawodowy piłkarz kiedykolwiek ich *użyje*? Cóż, nigdy nie widziałem, by ktoś w trakcie meczu biegał z ciężarkami lub robił zygzaki z piłką między pachołkami. Zawodnicy wykorzystują natomiast siłę, szybkość, instynkt i elastyczność wyrobione dzięki tym monotonnym, wielotygodniowym treningom. Są one niezbędnym elementem nauki gry w piłkę. Jeśli chcesz zostać zawodowym piłkarzem czy chociażby grać w drużynie uniwersyteckiej, czeka cię mnóstwo nudnych weekendów na boisku treningowym. Nie ma innej drogi. Dobra wiadomość jest jednak taka, że jeżeli nie jesteś w stanie zdzierżyć nużących ćwiczeń, możesz grać po prostu dla przyjemności, z przyjaciółmi. Zręczne wyminięcie obrońców lub celny strzał z dużej odległości da ci taką samą satysfakcję jak zawodowcowi. Będziesz zdrowsza i bardziej zadowolona, niż gdybyś siedziała w domu i oglądała zawodowców w telewizji.

A potem podsumowałbym to tak:

— Z matematyką jest mniej więcej tak samo. Nie musisz celować w matematyczne miejsca pracy. Nie ma w tym niczego złego i większość osób podejmuje taką właśnie decyzję. Nie oznacza to jednak, że nie możesz wykorzystywać matematyki w praktyce. Prawdopodobnie zresztą to robisz, nawet jeśli tak tego nie nazywasz. Matematyka jest nieodłącznie wpleciona w nasz system rozumowania i sprawia, że jesteś lepsza we wszystkim. Znajomość matematyki jest jak noszenie superrentgenowskich okularów, przez które widać tajne struktury, ukryte pod chaotycznym i nieuporządkowanym obliczem świata. Matematyka to nauka, która uczy, jak się nie mylić w swoich ocenach, a jej techniki i narzędzia zostały wypracowane przez setki lat sumiennej pracy i dyskusji. Z wykorzystaniem jej zasobów patrzysz na świat w głębszy, zdrowszy i bardziej wnikliwy sposób. Jedyne, czego potrzebujesz, to trener — lub nawet zwykły podręcznik — dzięki któremu poznasz reguły i podstawowe strategie. Ja będę twoim trenerem. Pokażę ci, jak to robić.

Rzadko mam tyle czasu, żeby faktycznie wygłaszać taką mowę na sali wykładowej. Ale w książce mogę sobie na to pozwolić. Liczę na to, że uda mi się udowodnić główne tezy, jakie przed chwilą zaprezentowałem, poprzez pokazanie Ci, że problemy, z jakimi borykamy się każdego dnia — polityczne, medyczne, handlowe czy teologiczne — są nieodłącznie splecione z matematyką. Wystarczy to zrozumieć, aby zyskać dojście do niedostępnej w żaden inny sposób wizji świata.

Ale nawet jeśli wygłoszę całą tę inspirującą przemowę, nie mam pewności, że studentka da się przekonać, szczególnie gdy jest wyjątkowo zacięta.

— Brzmi pięknie, profesorze — odpowie mi. — Ale to dość abstrakcyjne. Twierdzi pan, że dzięki matematyce może pan właściwie ocenić zjawiska, które bez niej oceniłby pan źle. Ale o jakie zjawiska chodzi? Proszę mi dać jakiś *przykład z życia*.

W tym momencie opowiedziałbym jej historię o Abrahamie Waldzie i brakujących dziurach po pociskach.

ABRAHAM WALD I BRAKUJĄCE DZIURY PO POCISKACH

Ta historia, jak wiele opowieści z czasów drugiej wojny światowej, zaczyna się od próby wyrzucenia Żydów z Europy przez nazistów, a kończy tym, że nazistom jest z tego powodu wstyd. Abraham Wald urodził się w 1902 roku w mieście, które nazywało się wówczas Klausenburg i leżało na terenach ówczesnej monarchii austro-węgierskiej[1]. Gdy Wald osiągnął wiek nastoletni, pierwsza wojna światowa trafiła już do podręczników, a jego rodzinne miasto zmieniło nazwę na Kluż i leżało w Rumunii. Wald był wnukiem rabina i synem koszernego piekarza, lecz niemal od samego początku edukacji przejawiał skłonność do matematyki. Szybko dostrzeżono jego talent i został posłany na studia matematyczne na Uniwersytet Wiedeński, gdzie zafascynowały go tematy uważane za trudne i abstrakcyjne nawet przez matematyków: teoria mnogości i przestrzeń metryczna.

Na swoje nieszczęście skończył studia w połowie lat trzydziestych ubiegłego wieku, gdy Austria była pogrążona w zapaści ekonomicznej i nie było szans, żeby obcokrajowiec dostał w Wiedniu posadę nauczyciela. Uratowała go propozycja pracy od Oskara Morgensterna. Morgenstern w późniejszym okresie wyemigrował do Stanów Zjednoczonych i stworzył podwaliny teorii gier, ale w 1933 roku był kierownikiem Instytutu Badań Ekonomicznych i zaoferował Waldowi skromną pensję za wykonywanie nietypowych zadań matematycznych. To okazało się dobrym posunięciem dla Walda, który dzięki doświadczeniu ekonomicznemu zdobył stypendium w Cowles Commission, instytucie badań ekonomicznych z siedzibą w Colorado Springs. Mimo pogarszającej się sytuacji politycznej Wald nie chciał definitywnie rozstawać się z czystą matematyką, lecz najazd nazistów na Austrię w znacznym stopniu ułatwił mu podjęcie tej decyzji. Po kilku miesiącach w Colorado otrzymał propozycję profesury na wydziale statystyki na Uniwersytecie Columbia, spakował się więc po raz drugi i przeprowadził do Nowego Jorku.

I tam właśnie wziął udział w wojnie.

Przez większą część drugiej wojny światowej pracował w Statistical Research Group (SRG)[2], czyli tajnym programie badawczym, który wykorzystywał potęgę statystyki w działaniach wojennych. Coś jak Projekt Manhattan, tyle że zamiast bomb konstruowano równania. Co ciekawe, grupa faktycznie operowała na Manhattanie pod adresem 410 W 118th St w dzielnicy Morningside Heights, czyli jedną przecznicę od Uniwersytetu Columbia. Aktualnie w budynku znajdują się mieszkania kadry naukowej i kilka gabinetów lekarskich, ale w 1943 roku mieściło się tam aktywne i pulsujące żywiołowymi dysputami centrum wojennej matematyki. W Applied Mathematics Group z Uniwersytetu Columbia dziesiątki młodych kobiet pochylały się nad kalkulatorami biurowymi Marchant, na których liczyły optymalną krzywą, jaką powinien podążać lotnik, aby utrzymać samolot wroga w zasięgu swoich karabinów. W innym mieszkaniu grupa badaczy z Princeton opracowywała protokoły strategicznego bombardowania. A grupa z Columbii zajmująca się projektem budowy bomby atomowej pracowała za następnymi drzwiami.

Ze wszystkich tych grup SRG była jednak najpotężniejsza i, jak się okazało, najbardziej wpływowa. Atmosferę intelektualnej otwartości i intensywność wydziału akademickiego potęgowały poczucie wyższego celu, nieodłącznie związanego z tak wysoką stawką. „Różne rzeczy się działy, gdy wydawaliśmy rekomendacje — napisał W. Allen Wallis, kierownik grupy. — Myśliwce wylatywały do akcji z karabinami naładowanymi zgodnie z zaleceniem Jacoba Wolfowitza* o mieszaniu różnych typów amunicji i wracały lub nie. Myśliwce marynarki wojennej wystrzelały rakiety z paliwem zgodnym z wyrywkową inspekcją Abe’a Girshicka, a rakiety eksplodowały, niszcząc nasze samoloty i zabijając pilotów, albo trafiały w cel”[3].

* Ojca Paula.

Konieczność posiadania talentu matematycznego była wprost proporcjonalna do wagi realizowanego zadania. Jak napisał Wallis, SRG było „najbardziej wyjątkową grupą statystyków, jaką kiedykolwiek stworzono, i to zarówno pod względem liczebności, jak i poziomu uczestników”[4]. Należeli do niej Frederick Mosteller, przyszły założyciel wydziału statystyki na Harvardzie, oraz Leonard Jimmie Savage, pionier teorii decyzji i wybitny propagator dziedziny nazwanej później statystyką bajezjańską[*]. Norbert Wiener, matematyk MIT i twórca cybernetyki, zaglądał tam od czasu do czasu. A Milton Friedman, przyszły noblista z ekonomii, często okazywał się dopiero czwartą osobą pod względem intelektu.

Pierwszą osobą pod względem intelektu w tej grupie był najczęściej Abraham Wald. Ten były wykładowca Allena Wallisa w Columbii funkcjonował w niej jak swego rodzaju matematyczna eminencja. Jako „wrogi obcy” nie miał teoretycznie prawa wglądu w tajne raporty, które tworzył. W grupie funkcjonował żart, że sekretarki miały obowiązek zabierać mu kartkę z notatkami, gdy tylko skończył na niej pisać[5]. Wald był pod pewnymi względami nieprawdopodobnym członkiem grupy. Jak zawsze, miał skłonność do abstrakcji i nie pociągało go praktyczne zastosowanie wiedzy. Nie dało się jednak zaprzeczyć jego motywacji do wykorzystania swoich talentów przeciwko państwom Osi. I gdy pojawiała się konieczność przekształcenia niejasnej idei w twardą matematykę, warto było go mieć w swoim zespole.

Przejdźmy do kwestii praktycznej[6]. Nie chcesz, żeby Twoje samoloty były zestrzeliwane przez wrogie myśliwce, więc je opancerzasz. Ale w ten sposób zwiększasz ich wagę, a cięższe samoloty zużywają więcej paliwa i trudniej nimi manewrować. Nadmierne opancerzenie samolotów jest problemem, lecz zbyt słabe opancerzenie także. Gdzieś pomiędzy mieści się optimum. I po to właśnie masz zespół matematyków w nowojorskim mieszkaniu — żeby wyznaczył to optimum.

Wojsko zgłosiło się do SRG z danymi, które uważało za przydatne. Amerykańskie samoloty, które powróciły z potyczek na europejskim niebie, były pokryte dziurami po pociskach. Ale zniszczenia korpusu nie były jednolite. Więcej dziur znajdywano w kadłubach niż w silnikach.

Sekcja samolotu	**Liczba pocisków na stopę kwadratową**
Silnik	1,11
Kadłub	1,73
Zbiorniki paliwa	1,55
Reszta samolotu	1,8

Wojskowi dostrzegli w tym możliwość optymalizacji. Uzyskasz ten sam poziom bezpieczeństwa z lżejszym opancerzeniem, jeśli skupisz się na najbardziej newralgicznych obszarach, czyli tych, które są najczęściej trafiane. Jak jednak obliczyć grubość pancerza dla poszczególnych części samolotu? Właśnie z takim pytaniem wojskowi przyszli do Walda, lecz odpowiedź, jaką uzyskali, była zupełnie inna.

[*] Savage był niemal zupełnie niewidomy, widział tylko kątem jednego oka, a w pewnym okresie życia przez sześć miesięcy żywił się wyłącznie pemikanem, żeby udowodnić tezę dotyczącą eksploracji Arktyki. Pomyślałem, że warto o tym wspomnieć.

Wald odpowiedział, że opancerzać należy nie te sekcje, które otrzymały najwięcej trafień, lecz te, gdzie dziur po pociskach było *najmniej*, czyli silniki.

Jego wkład w sprawę sprowadzał się do prostego pytania: gdzie są brakujące dziury? Te, które powinny się znajdować na osłonie silnika, gdyby zniszczenia rozkładały się równomiernie na cały samolot? Wald znał odpowiedź na to pytanie. Przyczyną, dla której tyle samolotów wróciło z nielicznymi trafieniami w sekcję silnika, było to, że samoloty trafione w silnik nie wracały. To, że znaczna liczba samolotów doleciała do bazy z kadłubem dziurawym jak ser szwajcarski, dość przekonująco dowodzi, że trafienia w kadłub można (i należy) zignorować. Na tej samej zasadzie w szpitalu spotkasz znacznie więcej osób postrzelonych w nogę niż w pierś. Wniosek nie jest jednak taki, że ludzie są rzadko trafiani w pierś, lecz taki, że ludzi trafionych w pierś z reguły nie ma sensu leczyć.

Oto stara matematyczna sztuczka, która bardzo pięknie to wszystko ujawnia: *załóż, że niektóre zmienne są równe zeru*. W tym przypadku modyfikowaną zmienną jest prawdopodobieństwo, że samolot trafiony w silnik jest w stanie utrzymać się w powietrzu. Założenie, że ta zmienna wynosi zero, oznacza, że każde trafienie w silnik gwarantuje strącenie maszyny na ziemię. Jak wówczas wyglądałyby dane do analizy? Samoloty wracające z akcji miałyby podziurawione kadłuby, skrzydła i dzioby, lecz nienaruszoną sekcję silnika. Analitycy wojskowi mogą to wyjaśnić na dwa sposoby: albo niemieckie pociski z jakiegoś powodu trafiają we wszystkie sekcje samolotu poza silnikiem, albo silnik jest skrajnie wrażliwą sekcją. Oba sposoby tłumaczą uzyskane dane, ale drugi jest znacznie bardziej sensowny. Opancerzać powinno się te sekcje, w których było najmniej pocisków.

Rekomendacja Walda została szybko wprowadzona w życie, a marynarka wojenna i siły powietrzne korzystały z niej także w wojnach w Korei i Wietnamie[7]. Nie jestem w stanie powiedzieć, ile amerykańskich samolotów dzięki temu ocalało, chociaż analityczni spadkobiercy SRG pracujący współcześnie dla wojska z pewnością mogliby sporo na ten temat powiedzieć. Amerykańskie siły zbrojne zawsze zdawały sobie sprawę z tego, że wojny nie wygrywa ten kraj, którego obywatele są odważniejsi, dumniejsi lub nieznacznie bardziej lubiani przez Boga. Zwycięża zazwyczaj ta strona, która ma o 5% mniej strąconych samolotów, zużywa o 5% mniej paliwa lub zapewni piechocie o 5% więcej wartości odżywczych przy jednoczesnym obniżeniu kosztów do 95% poprzednich wydatków. To nie są fakty, na podstawie których kręci się filmy wojenne, lecz tak wyglądają realia wojen. I na każdym kroku mamy do czynienia z matematyką.

Dlaczego Wald dostrzegł coś, czego nie dostrzegli wojskowi, dysponujący znacznie większą wiedzą i doświadczeniem w kwestii potyczek powietrznych? Wszystko sprowadza się do jego matematycznych nawyków w rozumowaniu. Matematycy zawsze pytają: „Jakie przyjąłeś założenia? Czy są uzasadnione?". To bywa irytujące, ale jednocześnie jest też bardzo produktywne. W tym przypadku wojskowi nieświadomie przyjęli założenie, że samoloty, które powróciły, to reprezentatywna próbka wszystkich samolotów. Gdyby to było prawdą, uzasadnione byłoby wyciąganie wniosków o rozkładzie trafień na wszystkich samolotach na podstawie tych, które wróciły. Ale w tej samej chwili, gdy uświadomisz sobie, że stawiasz taką hipotezę, dotrze do Ciebie jej całkowita błędność. Nic nie przemawia za tym, że samolot ma jednakowe szanse na powrót niezależnie od tego, gdzie zostanie trafiony. Ujmując to matematycznym żargonem, do którego wrócimy w rozdziale 15., istnieje *korelacja* między prawdopodobieństwem powrotu z misji i lokalizacją dziur po pociskach.

Kolejną przewagą Walda była jego słabość do abstrakcji. Wolfowitz — student Walda na Uniwersytecie Columbia — napisał, że Wald lubował się w „najbardziej abstrakcyjnych problemach" i że „zawsze był chętny do dyskusji matematycznych, ale nie interesowały go uproszczenia i praktyczne zastosowania"[8].

Nie sposób zaprzeczyć, że z racji swej osobowości Waldowi trudno było zajmować się praktycznymi problemami. Szczegóły dotyczące samolotów i dział były w jego oczach nadmiarową tapicerką, którą ignorował, by przyjrzeć się drewnianemu szkieletowi spajającemu całą tę historię. Czasem takie podejście skutkuje zignorowaniem istotnych detali. Pozwala jednak dostrzec wspólną strukturę problemów, które na pierwszy rzut oka wydają się zupełnie inne. Oznacza to, że możesz korzystać ze swego doświadczenia nawet w dziedzinach, na których na pozór w ogóle się nie znasz.

Dla matematyka ukrytą strukturą problemu dziur po pociskach jest zjawisko zwane **błędem przeżywalności** (ang. *survivorship bias*), które pojawia się regularnie we wszelkiego rodzaju kontekstach. Ale wystarczy, że je poznasz — jak Wald — a będziesz je dostrzegać wszędzie, gdzie się ukrywa.

Podobnie jest z funduszami inwestycyjnymi. Ocena wyników funduszy to temat, w którym nie możesz sobie pozwolić nawet na drobny błąd. 1% różnicy w rocznym wzroście wartości może przesądzić o tym, czy fundusz jest interesujący, czy beznadziejny. Przypisane przez portal Morningstar do kategorii „Large Blend" fundusze, które inwestują w duże przedsiębiorstwa należące zazwyczaj do listy S&P 500, sprawiają wrażenie interesujących. Od 1995 do 2004 roku zwiększyły wartość średnio o 178,4%, co daje solidne 10,8% rocznie*. Wygląda na to, że gdybyś miał jakąś zbędną gotówkę, dobrze by było w nie zainwestować, prawda?

Otóż nie. Przeprowadzone w 2006 roku przez Savant Capital badania pokazały te liczby w nieco mniej przychylnym świetle[9]. Zastanów się jeszcze raz nad tym, w jaki sposób portal Morningstar generuje te wyniki. Jest rok 2004, a my bierzemy wszystkie fundusze sklasyfikowane jako „Large Blend" i sprawdzamy, o ile wzrosły przez ostatnie dziesięć lat.

Czegoś tu jednak brakuje: *funduszy, których nie ma*. Fundusze nie żyją wiecznie. Jedne prosperują, inne upadają. Te, które upadły, z zasady nie zarabiały pieniędzy. Dlatego ocena dziesięcioletnich wyników funduszy na podstawie tych, które przetrwały, jest jak snucie wniosków o zręczności pilotów w unikaniu kul na podstawie samolotów, które wróciły do bazy. Załóżmy, że żaden samolot nie ma więcej niż jednej dziury po pocisku. Czy to oznacza, że nasi piloci mają wybitne umiejętności unikania nieprzyjacielskiego ostrzału? Czy może raczej należałoby sądzić, że samoloty trafione więcej niż jeden raz spadły w płomieniach na ziemię?

Jak wynika z badań Savant Capital, po uwzględnieniu wyników upadłych funduszy stopa zwrotu spada do 134,5%, co daje znacznie mniej imponujące 8,9% rocznie. Potwierdziły to także późniejsze analizy. Przeprowadzone w 2011 roku przez „Review of Finance" gruntowne badania obejmujące blisko 5000 funduszy wykazały, że wyniki 2641 funduszy, które przetrwały, są o około 20% wyższe niż te same wyniki po uwzględnieniu tych, które nie przetrwały[10]. Ta znacząca rozbieżność wynikająca z błędu przeżywalności mogła być zaskoczeniem dla inwestorów, ale Abraham Wald prawdopodobnie nie widziałby w niej nic niezwykłego.

* Trzeba zaznaczyć, że indeks S&P 500 poradził sobie jeszcze lepiej, odnotowując w tym samym okresie wzrost o 212,5%.

MATEMATYKA JEST ROZWINIĘCIEM ZDROWEGO ROZSĄDKU PRZY UŻYCIU INNYCH ŚRODKÓW

W tym momencie mój nastoletni rozmówca zapewne by mi przerwał i całkiem rozsądnie spytał: gdzie w tym jest matematyka? Co prawda Wald był matematykiem i nie sposób zaprzeczyć, że zaoferował pomysłowe rozwiązanie problemu dziur po pociskach, ale co w nim matematycznego? Nie wykorzystał żadnych tożsamości trygonometrycznych, całek, nierówności czy wzorów.

Przede wszystkim muszę zaznaczyć, że Wald użył wzorów. Opowiedziałem tę historię bez nich, bo to tylko wprowadzenie. Gdybyś pisał książkę dla dzieci o rozmnażaniu człowieka, nie zagłębiałbyś się we wprowadzeniu w całą tę hydraulikę związaną z umieszczeniem dzidziusia w brzuszku mamusi. Zamiast tego zacząłbyś od czegoś takiego: „Wszystko w naturze się zmienia. Drzewa tracą liście na zimę, aby wiosną rozkwitnąć na nowo. Niepozorna gąsienica wchodzi w fazę poczwarki i zmienia się w olśniewającego motyla. Ty także jesteś częścią natury i…".

To właśnie ta część mojej książki.

Ale jesteśmy dorośli. Darujmy sobie na chwilę subtelności, żeby zobaczyć przykładową stronę raportu Walda[11].

można by wyznaczyć dolne ograniczenie na Q_i. Założenie jest takie, że spadek z qi do qi+1 leży między granicami właściwymi. Dlatego można wyznaczyć zarówno górne, jak i dolne ograniczenie dla Q_i.

Zakładamy, że

$$\lambda_1 q_i \leq q_{i+1} \leq \lambda_2 q_i \;,$$

gdzie $\lambda_1 < \lambda_2 < 1$ i takie, że równanie

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{\lambda_1^{\frac{j(j-1)}{2}}} < 1 - a_0 \qquad \text{(A)}$$

jest spełnione.

Dokładne rozwiązanie jest żmudne, można jednak wyznaczyć przybliżone wartości górnej i dolnej granicy Q_i dla $i < n$ za pomocą poniższej procedury. Zbiór wykorzystanych przez nas hipotetycznych danych to

$$\begin{array}{ll} a_0 = 0{,}780 & a_3 = 0{,}010 \\ a_1 = 0{,}070 & a_4 = 0{,}005 \\ a_2 = 0{,}040 & a_5 = 0{,}005 \\ \lambda_1 = 0{,}800 & \lambda_2 = 0{,}900 \end{array}$$

Warunek A jest spełniony, gdyż przez podmianę

czyli mniej niż

DOLNY LIMIT Q_i

Pierwszym krokiem jest rozwiązanie równania 66. Wymaga to rozwiązania poniższych czterech równań dla dodatnich pierwiastków g_0, g_1, g_2, g_3.

Mam nadzieję, że nie było to dla Ciebie zbyt szokujące.

Trzeba jednak zaznaczyć, że *pomysł* stojący u podstaw wniosków Walda nie wymagał pokazanych powyżej formalności. Wyjaśniliśmy go bez wykorzystania jakichkolwiek równań. Dlatego pytanie mojego ucznia nadal pozostaje bez odpowiedzi. Gdzie w tym jest matematyka? Może to raczej zwykły zdrowy rozsądek?

Tak. Matematyka to właśnie zdrowy rozsądek. Na podstawowym poziomie nie ma żadnych wątpliwości w tej kwestii. Jak wyjaśnić komuś, że dodanie siedmiu przedmiotów do pięciu przedmiotów da ten sam wynik co dodanie pięciu przedmiotów do siedmiu przedmiotów? Nie da się. Ten fakt jest nieodłącznie wpisany w nasz sposób myślenia o dodawaniu przedmiotów. Matematycy lubią nadawać nazwy zjawiskom opisywanym przez nasz zdrowy rozsądek i zamiast powiedzieć: „*Ta* rzecz plus *tamta* rzecz to *to samo* co *tamta* rzecz plus *ta* rzecz”, stwierdzimy: „Dodawanie jest przemienne”. Albo, jako że lubimy symbole, napiszemy:

Dla każdego a i b a+b = b+a.

Mimo tak oficjalnego wzoru mówimy o fakcie instynktownie rozumianym nawet przez dzieci.

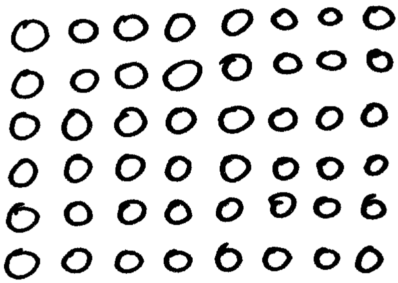
Mnożenie to nieco inna historia. Wzór wygląda dość podobnie:

Dla każdego a i b a×b = b×a.

Na widok tego równania umysł nie zareaguje takim samym: „No, ba”, jak w przypadku dodawania. Czy to, że dwa zestawy sześciu rzeczy są równe sześciu zestawom dwóch rzeczy, także jest kwestią „zdrowego rozsądku”?

Nie wiem. Wiem jednak, że może *stać się* zdroworozsądkową kwestią. Oto moje najwcześniejsze matematyczne wspomnienie. Leżę na podłodze w domu rodziców z policzkiem przyciśniętym do kosmatego dywanu i patrzę na głośniki wieży stereo. Bardzo możliwe, że słucham drugiej strony niebieskiego albumu Beatlesów. Być może mam sześć lat. Są lata sześćdziesiąte, więc głośniki mają fronty z prasowanego drewna z małymi okrągłymi otworami tworzącymi duży prostokąt. Osiem otworów w poprzek, sześć otworów z góry na dół. Leżę więc sobie i patrzę na te dziurki. Sześć rzędów. Osiem kolumn. Zmieniając sposób patrzenia, widzę na zmianę albo rzędy, albo kolumny. Sześć rzędów po osiem otworów lub osiem kolumn po sześć otworów.

I wtedy to do mnie dociera. Osiem szóstek to tyle samo co sześć ósemek. Nie dlatego, że tak mi powiedziano, lecz dlatego, że po prostu nie może być inaczej. Liczba otworów w panelu jest taka sama, niezależnie od metody użytej do ich obliczenia.



Panel głośnika rodziców, 1977

Zwykle uczy się matematyki jako długiej listy reguł. Przyswajasz je po kolei i musisz ich przestrzegać, bo jak nie, to dostaniesz jedynkę. *To nie jest matematyka.* Matematyka to badanie zjawisk, które zachodzą w jakiś sposób, gdyż nie ma możliwości, aby zachodziły w inny.

Powiedzmy sobie jednak szczerze, że nie wszystko w matematyce można wyrazić tak przejrzyście i intuicyjnie jak dodawanie i odejmowanie. Nie da się obliczyć całki za pomocą zdrowego rozsądku. Mimo to całka *bazuje* na zdrowym rozsądku — Newton wykorzystał nasze wrodzone przeczucie dotyczące obiektów poruszających się w linii prostej, sformalizował je, a następnie na podstawie tej formalnej struktury zbudował uniwersalny opis ruchu. Gdy znasz teorię Newtona, możesz wykorzystać ją w rozwiązywaniu problemów, od których z pewnością rozbolałaby Cię głowa, gdybyś nie miał do dyspozycji odpowiednich równań. Na tej samej zasadzie tworzymy mentalne systemy oceny prawdopodobieństwa uzyskania określonego wyniku. Są one jednak ułomne i mało wiarygodne, szczególnie gdy dotyczą skrajnie rzadkich zdarzeń. W takich sytuacjach wspomagamy swoją intuicję ugruntowanymi twierdzeniami oraz technikami i fabrykujemy z nich matematyczną teorię prawdopodobieństwa.

Specjalistyczny język, jakim rozmawiają ze sobą matematycy, to potężne narzędzie do precyzyjnego i szybkiego przekazywania skomplikowanych idei. Ale jego obcość może u osób z zewnątrz wywoływać wrażenie zamkniętego systemu myślenia, niedostępnego dla normalnych ludzi. W rzeczywistości jest jednak wręcz przeciwnie.

Matematykę można przyrównać do napędzanej atomowo protezy, którą przytwierdza się do swojego zdrowego rozsądku, potęgując jego zasięg i możliwości. Mimo tej potęgi i mimo czasem odpychających i abstrakcyjnych formuł i równań kryjące się za tym wszystkim myślenie nie różni się aż tak bardzo od sposobu, w jaki analizujemy bardziej praktyczne problemy. W wyobrażeniu tego pomaga mi obraz Iron Mana, robiącego pięścią dziurę w ścianie. Z jednej strony przebijająca ścianę siła nie pochodzi z mięśni Tony'ego Starka, lecz jest wynikiem działania serii perfekcyjnie zsynchronizowanych serwomechanizmów, napędzanych przez kompaktowy generator cząsteczek beta. Z drugiej strony, z punktu widzenia Tony'ego Starka, to on uderza pięścią w ścianę, dokładnie tak, jak zrobiłby to bez zbroi, tyle że ze znacznie większą siłą.

Parafrazując Clausewitza: matematyka jest jedynie rozwinięciem zdrowego rozsądku przy użyciu innych środków.

Bez oferowanych przez nią rygorystycznych struktur zdrowy rozsądek może sprowadzić Cię na manowce. To właśnie przytrafiło się wojskowym, którzy chcieli opancerzyć te elementy samolotu, które były już wystarczająco opancerzone. Ale bez zdrowego rozsądku — bez tych ciągłych konfrontacji między abstrakcyjnym myśleniem a przeczuciami dotyczącymi ilości, czasu, przestrzeni, ruchu, zachowania i niedomówień — matematyka byłaby tylko sterylnym ćwiczeniem sprowadzającym się do przestrzegania reguł i księgowania. Innymi słowy, byłaby tym, czym wydaje się być marudnym studentom.

To prawdziwe zagrożenie. John von Neumann w swoim eseju z 1947 roku *The Mathematician* ostrzegał:

> Oddalanie się matematyki od empirycznych korzeni lub, co gorsza, tworzenie drugich i trzecich generacji tylko pośrednio zainspirowanych ideami zakorzenionymi w „rzeczywistości" niesie ze sobą bardzo poważne zagrożenie. Matematyka staje się coraz bardziej czysto estetyczną *sztuką dla sztuki*. Nie ma w tym niczego złego, jeśli jest otoczona przez powiązane dziedziny o wciąż obowiązujących ścisłych więziach empirycznych lub jeśli mają na nią wpływ ludzie o wyjątkowo dobrze wyrobionym guście. Istnieje jednak niebezpieczeństwo podążenia po linii najmniejszego oporu i że główny konar w oddaleniu od korzeni rozszczepi się na mnóstwo nieistotnych gałęzi, a dyscyplina zamieni się w zdezorganizowaną masę skomplikowanych szczegółów. Innymi słowy, wraz z oddalaniem się od empirycznych źródeł i tworzeniem coraz bardziej „abstrakcyjnych" odgałęzień rośnie groźba, że matematyka ulegnie degeneracji*.

Z JAKĄ MATEMATYKĄ SPOTKASZ SIĘ W TEJ KSIĄŻCE?

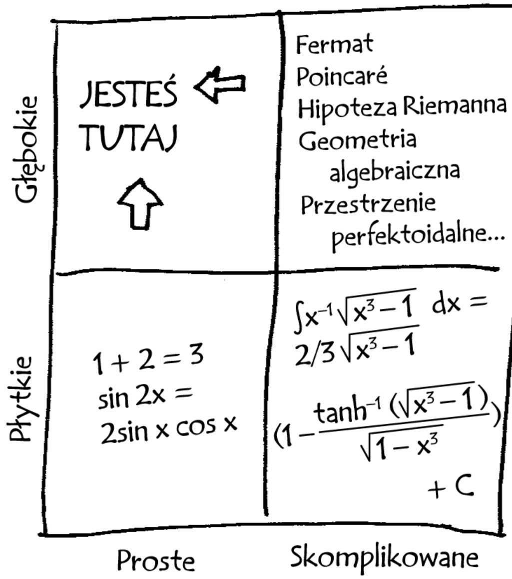
Jeśli znasz matematykę wyłącznie ze szkoły, wmówione Ci wyobrażenie na jej temat jest bardzo ograniczone i pod pewnymi istotnymi względami fałszywe. Matematyka w szkole składa się w znacznej mierze z sekwencji niepodważalnych faktów i pochodzących od wyższego autorytetu reguł, których się nie kwestionuje. Kwestie matematyczne są przedstawiane jako ustalone raz na zawsze.

To jednak nieprawda. Nawet w tak prostych przedmiotach badań jak liczby i figury geometryczne nasza ignorancja znacznie przewyższa naszą wiedzę. A to, co wiemy, wymagało olbrzymiego wysiłku, licznych dysput i wielu momentów zwątpienia. Lecz cały ten pot i chaos zostały w Twoim podręczniku starannie pominięte.

Są oczywiście fakty i fakty. Nigdy nie było zbyt wielkich kontrowersji wokół tego, że 1+2 = 3. Pytanie o to, *w jaki sposób i czy w ogóle da się tak naprawdę udowodnić*, że 1+2 = 3, które oscyluje niepewnie między matematyką a filozofią, to zupełnie inna historia — wrócimy do tego na końcu książki. To obliczenie jest jednak ze wszech miar prawdziwe. Chaos jest związany z czymś innym i kilka razy pojawi się w naszym polu widzenia.

Fakty matematyczne mogą być proste lub skomplikowane oraz płytkie lub głębokie. Tym samym możemy podzielić matematyczny wszechświat na cztery ćwiartki.

* Von Neumann miał bardzo zdecydowany pogląd na istotę matematyki, trzeba jednak przyznać, że określenie matematyki uprawianej wyłącznie dla walorów estetycznych jako „zdegenerowanej" może budzić niesmak. Von Neumann napisał to dziesięć lat po wystawie *entartene Kunst* („zdegenerowanej sztuki") w hitlerowskim Berlinie, której celem było pokazanie, że „sztuka dla sztuki" jest czymś uwielbianym przez Żydów i komunistów i ma na celu podminowanie zdrowej „realistycznej" sztuki pożądanej w odrodzonym germańskim państwie. Te okoliczności wzbudzają chęć obrony matematyki, która pozornie nie ma żadnego celu. Komentator o innych zapatrywaniach politycznych niż moje mógłby w tym momencie wspomnieć o sumiennej pracy von Neumanna nad skonstruowaniem i produkcją broni atomowej.



Podstawowe fakty arytmetyczne w rodzaju 1+2 = 3 są proste i płytkie. Podobnie jak podstawowe tożsamości, takie jak sin(2x)=2 sin x cos x lub rozwiązanie równania kwadratowego. Przekonanie się do nich jest nieco trudniejsze niż do 1+2 = 3, nie wymagają jednak żadnych niezwykłych konceptualnych sztuczek.

W ćwiartce „skomplikowane i płytkie" znajdują się takie problemy jak mnożenie dziesięciocyfrowych liczb, obliczanie zawiłej całki oznaczonej lub — po kilku latach studiów — wyznaczenie śladu Frobeniusa formy modularnej o przewodniku 2377. Można sobie wyobrazić taką sytuację, w której z jakiegoś powodu musisz umieć rozwiązać takie problemy, i nie sposób zaprzeczyć, że zrobienie tego tylko za pomocą kartki i długopisu byłoby albo irytujące, albo niemożliwe. A w przypadku tego ostatniego problemu samo zrozumienie pytania wymaga dość dobrego wykształcenia w tej dziedzinie. Nie zmienia to faktu, że znajomość takich zagadnień nie wzbogaca zbytnio Twojej wiedzy o świecie.

Ćwiartka „skomplikowane i głębokie" to miejsce, w którym zawodowi matematycy, tacy jak ja, starają się spędzać jak najwięcej czasu. To tu zamieszkują najsłynniejsze twierdzenia i hipotezy: hipoteza Riemanna, wielkie twierdzenie Fermata*, hipoteza Poincarégo, P kontra NP, twierdzenie Gödla… Każde z tych twierdzeń zawiera idee o głębokim, fundamentalnym znaczeniu, które są jednocześnie oszałamiająco piękne i brutalnie techniczne, i każde z nich mogłoby być bohaterem osobnej książki[12].

Ale ta książka jest inna. W tej książce będziemy trzymać się lewej górnej ćwiartki: prostej i głębokiej. Zajmiemy się ideami matematycznymi, których znajomość jest pożyteczna i do których można podejść bezpośrednio, niezależnie od tego, czy w matematycznej edukacji

* Które wśród naukowców jest aktualnie nazywane twierdzeniem Wilesa, ponieważ Andrew Wiles je udowodnił (z krytycznym wsparciem Richarda Taylora), a Fermat nie. Podejrzewam jednak, że tradycyjna nazwa nie zostanie przez to wyparta.

zatrzymałeś się na początkach algebry, czy zaszedłeś znacznie dalej. Nie są to jednak „zwykłe fakty" w rodzaju prostych twierdzeń arytmetycznych. Są to zasady, których zastosowanie wykracza daleko poza to, co powszechnie uważa się za matematyczne. To użyteczne narzędzia, a właściwe korzystanie z nich pomaga w unikaniu pomyłek.

Czysta matematyka to coś w rodzaju klasztoru — ciche miejsce starannie odseparowane od zgubnych wpływów chaosu i nieładu świata. Dorastałem w otoczeniu takich murów. Moim matematyczni znajomi dawali się skusić fizyce, genomice czy mrocznej sztuce zarządzania funduszami hedgingowymi, ale ja nie czułem pociągu do takich *ekscesów**. Po skończeniu studiów poświęciłem się teorii liczb, nazwanej przez Gaussa „królową matematyki" — najczystszej z dziedzin, świętemu ogrodowi w samym środku klasztoru, gdzie rozważa się te same kwestie na temat liczb i równań, które spędzały sen z powiek Grekom i mimo upływu dwudziestu pięciu stuleci nie stały się ani odrobinę mniej irytujące.

Początkowo zajmowałem się teorią liczb w klasyczny sposób, przeprowadzając dowody twierdzeń dotyczących sum czwartych potęg liczb naturalnych, co teoretycznie, pod naciskiem, mogłem wyjaśnić rodzinie w święta, nawet jeśli nie byłbym w stanie wyjaśnić im, jak udowodniłem to, co udowodniłem. Szybko jednak wciągnęły mnie jeszcze bardziej abstrakcyjne kwestie i problemy — rezydualne modularne reprezentacje Galois, kohomologia schematów moduli, układy dynamiczne na przestrzeniach jednorodnych i tego typu rzeczy — o których nie da się porozmawiać z kimś spoza archipelagu seminaryjnych korytarzy i salonów dla kadry wykładowczej na Oksfordzie, w Princeton, Kioto, Paryżu czy w Madison w Wisconsin, gdzie jestem w tej chwili profesorem. Gdy Ci powiem, że są to ekscytujące, znaczące i piękne problemy, które nigdy mi się nie znudzą, będziesz mi musiał uwierzyć na słowo, gdyż potrzeba naprawdę długiej edukacji, żeby w ogóle dotrzeć do poziomu umożliwiającego zobaczenie przedmiotu badań.

Stało się jednak coś dziwnego. Im bardziej abstrakcyjne i odległe od życia były moje badania, tym wyraźniej zacząłem dostrzegać matematykę w zewnętrznym świecie. Nie reprezentacje Galois czy kohomologie, lecz idee prostsze, starsze i równie głębokie, należące do północnozachodniej ćwiartki konceptualnego kwadratu. Zacząłem pisać artykuły do magazynów i czasopism o tym, jak wygląda świat przez matematyczne okulary, i ku swojemu zdziwieniu odkryłem, że chętnie czytali je nawet ludzie, którzy twierdzili, że nienawidzą matmy. To były swego rodzaju lekcje, ale zupełnie inne od tego, co robiliśmy na salach wykładowych.

Miały one jednak jedną wspólną cechę z zajęciami dla studentów: czytelnik dostawał zadanie do wykonania. Wróćmy do von Neumanna i *The Mathematician*:

> Trudniej zrozumieć mechanikę samolotu i teorie dotyczące sił, które go unoszą i napędzają, niż wsiąść do niego jako pasażer czy nawet go pilotować. Dziwne jest oczekiwanie, że ktoś zrozumie proces bez wcześniejszego gruntownego zaznajomienia się z nim, korzystania z niego i zasymilowania go na instynktownym i empirycznym poziomie.

* Muszę jednak przyznać, że w młodości przez pewien czas sądziłem, że chcę być Poważnym Powieściopisarzem. Napisałem nawet Poważną Powieść zatytułowaną *The Grasshopper King*, która została opublikowana. Odkryłem jednak, że połowę każdego dnia poświęconego na Poważne Powieściopisarstwo spędzałem na bezcelowym kręceniu się po domu i żałowaniu, że nie rozwiązuję jakichś problemów matematycznych.

Inaczej mówiąc, trudno *zrozumieć* matematykę, jeśli się jej nie *praktykuje*. Droga do geometrii nie jest usiana różami, jak Euklides powiedział Ptolemeuszowi lub, w zależności od źródła, Menaichmos powiedział Aleksandrowi Wielkiemu. (Powiedzmy sobie szczerze: słynne maksymy przypisywane starożytnym uczonym są prawdopodobnie zmyślone, ale to nie umniejsza ich walorów edukacyjnych).

To nie jest ten rodzaj książki, w której zamaszystymi i niejasnymi gestami wskazuję w stronę monumentów wielkich matematyków i każę Ci podziwiać je ze stosownie dużej odległości. Tutaj pobrudzisz sobie ręce. Zdarzy nam się coś policzyć. Pojawi się parę wzorów i równań, gdy będą mi potrzebne, żeby czegoś dowieść. Nie musisz jednak znać się na żadnej wyższej matematyce — wystarczy zwykła arytmetyka, chociaż będę wyjaśniał sporo wykraczających poza nią kwestii. Narysuję parę prymitywnych wykresów czy tabel. Natrafisz na tematy ze szkoły, wyciągnięte poza ich typowe środowisko. Zobaczysz na przykład, w jaki sposób funkcje trygonometryczne opisują wzajemną zależność dwóch zmiennych, co rachunek całkowy ma do powiedzenia na temat relacji zjawisk liniowych i nieliniowych oraz jak wykorzystać równanie kwadratowe jako kognitywny model w procesie badawczym. Sporadycznie natrafisz tu na matematykę wypchniętą na studia lub jeszcze dalej — na przykład kryzys w teorii zbiorów, który służy jako metafora praworządności Sądu Najwyższego Stanów Zjednoczonych i sędziowania w baseballu, ostatnie odkrycia w analitycznej teorii liczb, demonstrujące współzależność między strukturą i przypadkowością, czy teorie informacji i struktur kombinatorycznych, za pomocą których wyjaśnię, jak grupa studentów MIT wygrała miliony dolarów dzięki zrozumieniu zasad loterii stanowej w Massachusetts.

Od czasu do czasu trafisz na plotkę o jakimś wybitnym matematyku lub na odrobinę spekulacji filozoficznych. Raz czy dwa razy zdarzy się mi nawet coś dowieść. Nie będzie jednak żadnych zadań domowych i sprawdzianów.

SKOROWIDZ

A

B

C

D

E

F

G

H

I

K

L

Ł

M

N

O

P


PROGRAM
PARTNERSKI
GRUPY WYDAWNICZEJ HELION
1. ZAREJESTRUJ SIĘ
2. PREZENTUJ KSIĄŻKI
3. ZBIERAJ PROWIZJĘ
Zmień swoją stronę WWW
w działający bankomat!
Dowiedz się więcej i dołącz już dzisiaj!
http://program-partnerski.helion.pl
GRUPA WYDAWNICZA
Helion SA

Matematyka jest częścią naszego świata. Jest nieodłącznie związana z naszym sposobem myślenia i rozumienia rzeczywistości. Matematyka to nauka, której techniki i narzędzia zostały wypracowane przez setki lat sumiennej pracy i dyskusji. Dzięki niej spoglądasz na świat w głębszy, zdrowszy i bardziej wnikliwy sposób. Aby jednak choć trochę nauczyć się matematyki, trzeba ją praktykować. Wymaga to czasu i wysiłku, ale matematyczne myślenie wyjątkowo się przydaje!

Trzymasz w ręku książkę, dzięki której nauczysz się matematycznego myślenia. Matematyka jest tu traktowana jako rozwinięcie zdrowego rozsądku, narzędzie pozwalające na odnajdywanie ukrytych zależności, wyszukiwanie rozwiązań pozornie nierozwiązywalnych problemów i swobodne poruszanie się po zupełnie różnych dziedzinach. Opisano tu dość złożone zagadnienia, takie jak problemy optymalizacji, inżynieria wsteczna, rachunek prawdopodobieństwa, i pokazano, w jaki sposób można je wykorzystywać każdego dnia podczas podejmowania różnych decyzji, dokonywania ocen czy wyborów. Prędko się przekonasz, jak bardzo praktykowanie matematyki ćwiczy umysł i wyrabia umiejętność szybkiej i trafnej oceny rzeczywistości!

Dzięki tej zajmującej książce niematematyk:

- zrozumie podstawowe idee matematyczne,
- rozwinie umiejętność matematycznego myślenia,
- nauczy się wnioskować z żelazną matematyczną precyzją,
- być może polubi matematykę,
- na pewno o wiele rzadziej będzie się mylić!

Dr Jordan Ellenberg wykłada matematykę na Uniwersytecie Wisconsin-Madison. Jest badaczem, który specjalizuje się w teorii liczb i geometrii algebraicznej. Aktywnie popularyzuje wiedzę o matematyce: pisze dla „New York Timesa", „Washington Post", „Wired", „Wall Street Journal" czy „Boston Globe". Od 2012 roku jest członkiem Amerykańskiego Towarzystwa Matematycznego.

PRAKTYKUJ MATEMATYKĘ I NIE DAJ SIĘ ZMYLIĆ!

Helion
księgarnia internetowa
http://helion.pl
zamówienia telefoniczne
0 801 339900
0 601 339900
Informatyka w najlepszym wydaniu

Helion SA
ul. Kościuszki 1c, 44-100 Gliwice
tel.: 32 230 98 63
e-mail: helion@helion.pl
http://helion.pl

ISBN 978-83-283-3262-1
9 788328 332621
cena: 39,90 zł