- Trzydzieści wybranych twierdzeń matematycznych z pełnymi dowodami
- Trzy główne typy dowodów: dowody wprost, dowody przez sprowadzenie do niedorzeczności i dowody indukcyjne
- Opowieści o niewymierności liczby $\sqrt{2}$ i liczby *e*, nieprzeliczalności zbioru liczb rzeczywistych, twierdzeniu Pitagorasa, nieskończoności zbioru liczb pierwszych i inne

Popularnonaukowa **książka o dowodach matematycznych**

Jak tego dowieść – *krótka opowieść*

Dowody matematyczne dla każdego

Dariusz Laskowski

Helion EDUKACJA

Wszelkie prawa zastrzeżone. Nieautoryzowane rozpowszechnianie całości lub fragmentu niniejszej publikacji w jakiejkolwiek postaci jest zabronione. Wykonywanie kopii metodą kserograficzną, fotograficzną, a także kopiowanie książki na nośniku filmowym, magnetycznym lub innym powoduje naruszenie praw autorskich niniejszej publikacji.

Wszystkie znaki występujące w tekście są zastrzeżonymi znakami firmowymi bądź towarowymi ich właścicieli.

Autor oraz Wydawnictwo HELION dołożyli wszelkich starań, by zawarte w tej książce informacje były kompletne i rzetelne. Nie biorą jednak żadnej odpowiedzialności ani za ich wykorzystanie, ani za związane z tym ewentualne naruszenie praw patentowych lub autorskich. Autor oraz Wydawnictwo HELION nie ponoszą również żadnej odpowiedzialności za ewentualne szkody wynikłe z wykorzystania informacji zawartych w książce.

Redaktor prowadzący: Joanna Stopińska

Projekt okładki: Urszula Buczkowska

Fotografia na okładce została wykorzystana za zgodą Shutterstock.

Wydawnictwo HELION
ul. Kościuszki 1c, 44-100 GLIWICE
tel. 32 231 22 19, 32 230 98 63
e-mail: helion@helion.pl
WWW: http://helion.pl (księgarnia internetowa, katalog książek)

Drogi Czytelniku!
Jeżeli chcesz ocenić tę książkę, zajrzyj pod adres
http://helion.pl/user/opinie?jatedo
Możesz tam wpisać swoje uwagi, spostrzeżenia, recenzję.

ISBN: 978-83-246-3404-0

Copyright © Helion 2012

Printed in Poland.

• Kup książkę
• Poleć książkę
• Oceń książkę

• Księgarnia internetowa
• Lubię to! » Nasza społeczność

Spis treści

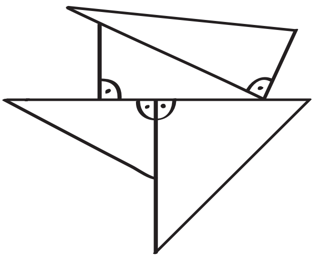
Wstęp

Książka, którą trzymasz w ręku, może być Twoim biletem wstępu do tej części matematyki, która większości ludzi, nawet wykształconych, wydaje się niedostępna, a może nawet dziwna czy niepotrzebna. Tematem tej publikacji są bowiem dowody matematyczne. I jeśli zaczynasz teraz myśleć o tym, żeby jak najszybciej odłożyć ją na półkę, dowiedz się, że jest ona właśnie dla Ciebie, bo zamieszczone tu dowody czyta się jak zwykłe opowieści.

Autor postawił sobie za cel (a Ty, Czytelniku, sprawdź, czy mu się to udało) zaprezentowanie dowodów w formie zrozumiałej dla laika zainteresowanego matematyką. Książka zawiera przykłady dowodów wprost, nie wprost i dowodów indukcyjnych. Do jej zrozumienia w zupełności wystarcza znajomość matematyki na poziomie szkoły ponadgimnazjalnej, a większość rozdziałów jest dostępna nawet dla gimnazjalistów. Znalazły się tu dowody takich klasycznych twierdzeń jak twierdzenia o niewymierności liczby $\sqrt{2}$ i liczby e, nieprzeliczalności zbioru liczb rzeczywistych, twierdzenia sinusów, twierdzenia Pitagorasa, rozbieżności szeregu harmonicznego, nieskończoności zbioru liczb pierwszych i kilku innych. Można zatem powiedzieć, że bohaterami tej książki są rozumowania, które mają nas przekonać o prawdziwości twierdzeń matematycznych, przedstawione jednak tak, żeby każdy Czytelnik mógł doznać przyjemności ich rozumienia.

14.

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa i trójkąty pitagorejskie



Twierdzenie Pitagorasa możemy sformułować tak:

Jeżeli trójkąt jest prostokątny, to kwadrat długości najdłuższego boku tego trójkąta jest równy sumie kwadratów długości pozostałych boków.

W tak zapisanym twierdzeniu wyraźnie rozpoznajemy jego dwie główne części: założenie i tezę. Wygląda to tak:

Jeżeli (założenie), to (teza).

Zamiana ich kolejności nie zawsze prowadzi do otrzymania prawdziwego twierdzenia odwrotnego (tak jest ono nazywane). W przypadku twierdzenia Pitagorasa po zamianie miejscami założenia i tezy, tak że jego założenie pełni rolę tezy twierdzenia odwrotnego, a jego teza rolę założenia twierdzenia odwrotnego, otrzymujemy również twierdzenie prawdziwe.

Jeżeli	trójkąt jest prostokątny,	to	kwadrat długości najdłuższego boku tego trójkąta jest równy sumie kwadratów długości pozostałych boków.

Jeżeli	kwadrat długości najdłuższego boku trójkąta jest równy sumie kwadratów długości pozostałych boków,	to	trójkąt ten jest prostokątny.

Ponieważ oba twierdzenia są prawdziwe, można by je zapisać w postaci jednego twierdzenia mającego postać równoważności.

Trójkąt jest prostokątny wtedy i tylko wtedy, gdy kwadrat długości najdłuższego boku tego trójkąta jest równy sumie kwadratów długości pozostałych jego boków.

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa daje możliwość rachunkowego sprawdzenia, czy dany trójkąt jest prostokątny, czy nie. Wystarczy tylko znać długości wszystkich jego boków, ustalić, który jest najdłuższy, podnieść do kwadratu długości wszystkich odcinków, zsumować kwadraty długości dwóch krótszych odcinków i porównać tę sumę z kwadratem długości najdłuższego. Spójrz na poniższe przykłady.

Mamy trójkąt o bokach 6 cm, 12 cm i 7 cm. Najdłuższym bokiem jest bok o długości 12 cm.

$(12\ \text{cm})^2 = 144\ \text{cm}^2$

$(6\ \text{cm})^2+(7\ \text{cm})^2 = 36\ \text{cm}^2+49\ \text{cm}^2 = 85\ \text{cm}^2$

Porównanie wyników obliczeń wskazuje na to, że nasz trójkąt nie jest prostokątny.

Weźmy drugi trójkąt, o bokach 13,7 cm, 10,5 cm i 8,8 cm.

$(13{,}7\ \text{cm})^2 = 187{,}69\ \text{cm}^2$

$(10{,}5\ \text{cm})^2+(8{,}8\ \text{cm})^2 = 110{,}25\ \text{cm}^2+77{,}44\ \text{cm}^2 = 187{,}69\ \text{cm}^2$

Tym razem mamy do czynienia z trójkątem prostokątnym.

Zwróćmy uwagę na praktyczną stronę tych faktów. Możemy na przykład użyć, wzorem egipskich mierniczych, sznura o długości równej obwodowi pewnego trójkąta prostokątnego, związanego na końcach i z zaznaczonymi na nim miejscami wierzchołków tego trójkąta, do wytyczenia kąta prostego w terenie. Najlepiej do tego nadają się trójkąty o długościach wyrażonych liczbami naturalnymi. Starożytni Egipcjanie znali takie trójkąty, ale jeden był szczególnie prosty — trójkąt o bokach długości 3, 4 i 5 identycznych jednostek. Sprawdźmy, czy jest on rzeczywiście prostokątny.

$5^2 = 25$

$3^2+4^2 = 9+16 = 25$

Istotnie jest. Trójkąt ten zwany jest trójkątem egipskim. Łatwym do wykonania przyrządem do wytyczenia kąta prostego w terenie jest na przykład linka o długości 3+4+5 = 12 jednostek, zawiązana na końcach, z zaznaczonymi na niej punktami w odległościach 3, 4 i 5 jednostek. Trzy osoby, trzymając ową linkę w tych właśnie punktach, po napięciu jej odcinków znajdujących się między tymi punktami, mogą wyznaczyć kąt prosty, który znajduje się oczywiście u zbiegu odcinków długości 3 i 4 jednostek.

Oto spotkaliśmy jeden z trójkątów pitagorejskich, to znaczy taki, który jest prostokątny i którego długości boków wyrażone są liczbami naturalnymi. Czy jest więcej takich trójkątów? Owszem. Jest ich nieskończenie wiele i nie tylko potrafimy tego dowieść, ale i znaleźć je wszystkie. Pokolenia matematyków udoskonalały dowód ich nieskończonej mnogości oraz prawdziwości wzorów pozwalających otrzymać dowolny z nich. Egipcjanie nie znali tych wzorów, choć znali kilka czy kilkanaście trójkątów pitagorejskich. Znaleźli je zapewne metodą prób i błędów, która jest szeroko stosowana nie tylko przez dzieci stawiające swoje pierwsze kroki, ale również przez matematyków. Metoda ta jednak nie pozwoli nam znaleźć dowodu naszego twierdzenia. Spróbujmy najpierw uściślić problem. Poszukiwanie trójkątów pitagorejskich jest tożsame ze znajdowaniem rozwiązań równania

$$x^2+y^2=z^2$$

w dziedzinie liczb naturalnych, to znaczy ze znajdowaniem trójek liczb naturalnych x, y, z, które je spełniają. Wykluczamy od razu trójki naturalne zawierające liczbę zero, które nie tworzą trójkątów. Na przykład:

$$0^2+1^2=1^2,$$

$$0^2+0^2=0^2.$$

To, że nasze równanie ma co najmniej jedno rozwiązanie naturalne niezawierające zera, już wiemy.

$$3^2+4^2=5^2$$

To znany nam już trójkąt egipski. Zauważmy też, że gdy pomnożymy każdą z tych trzech liczb 3, 4, 5 przez pewną liczbę naturalną d, uzyskując $3d$, $4d$, $5d$, to otrzymamy inny, choć podobny do naszego trójkąt pitagorejski. Jeśli bowiem

$$3^2+4^2=5^2,$$

to po pomnożeniu obu stron równości otrzymamy:

$$3^2d^2+4^2d^2=5^2d^2,$$

$$(3d)^2+(4d)^2=(5d)^2.$$

Przez przypadek udowodniliśmy, że trójkątów pitagorejskich podobnych do trójkąta egipskiego jest nieskończenie wiele. A czy są takie, które nie są do niego podobne? Spróbujmy to zbadać. Wiemy już, że kiedy mamy jedną trójkę pitagorejską, to mnożąc każdą z jej liczb przez identyczne niezerowe różne od 1 czynniki naturalne, otrzymujemy ich nieskończenie wiele, ale każdy taki trójkąt jest podobny do pozostałych z tej rodziny. Trójka liczb: 3, 4, 5, nie ma wspólnego dzielnika różnego od 1, jest więc jakby założycielem rodu trójkątów pitagorejskich $3d$, $4d$, $5d$ podobnych do trójkąta egipskiego. Nazwijmy każdą taką trójkę pitagorejską, która nie ma wspólnego dzielnika, trójką pierwotną i zadajmy jeszcze raz pytanie, czy istnieją różne od 3, 4, 5 pierwotne trójki pitagorejskie, ile ich jest i czy dają się one wyrazić jakimś wzorem. Zmieńmy nieco cel naszych poszukiwań. Szukamy naturalnych niezerowych trójek liczb naturalnych x, y, z, które spełniają równanie

$$x^2 + y^2 = z^2$$

i które nie mają wspólnego dzielnika naturalnego różnego od 1, to znaczy są względnie pierwsze. Będziemy bowiem poszukiwać tylko pierwotnych trójek pitagorejskich. Jeśli jednak x, y, z są względnie pierwsze, to muszą być również parami względnie pierwsze, bo gdyby wspólnym dzielnikiem x i y była liczba d, to $x = dk$ i $y = dl$ i wtedy

$$(dk)^2 + (dl)^2 = z^2,$$

$$d^2(k^2 + l^2) = z^2,$$

to znaczy, że d byłoby także dzielnikiem z. Gdyby natomiast któraś z liczb x lub y miała wspólny dzielnik większy od 1 z liczbą z, to — przy założeniu, że to jest x — mielibyśmy

$$x = dk \text{ i } z = dl$$

i wtedy

$$(dk)^2 + y^2 = (dl)^2,$$

$$y^2 = d^2(l^2 - k^2),$$

a wówczas d byłoby, wbrew założeniu, również dzielnikiem y. Zatem trójki pierwotne są parami względnie pierwsze. Wynika z tego dalej, że liczby x, y nie mogą być obie parzyste, bo miałyby wspólny dzielnik 2. Zauważmy, że nie mogą być one również obie nieparzyste, gdyby bowiem było $x = 2k+1$ i $y = 2l+1$, wtedy

$$x^2 + y^2 = (2k+1)^2 + (2l+1)^2 =$$

$$= 4k^2 + 4k + 1 + 4l^2 + 4l + 1 = 4(k^2 + k + l^2 + l) + 2 =$$

$$= 4(k^2 + k + l^2 + l) + 2$$

i liczba z^2 byłaby podzielna przez 2, a niepodzielna przez 4, co w przypadku kwadratu liczby naturalnej jest niemożliwe. Kwadrat jakiejś liczby naturalnej jest parzysty tylko wtedy, gdy ta liczba jest parzysta, jednakże wtedy kwadrat ten musi być liczbą podzielną przez 4.

$$(2n)^2 = 4n^2$$

Zatem jedna z liczb x, y jest parzysta, a druga nieparzysta. Zauważmy, że wtedy liczba z jest nieparzysta. Nie zmniejszając ogólności, możemy założyć, że to x jest parzyste, a y nieparzyste.

Wróćmy do naszego równania $x^2 + y^2 = z^2$ i odejmijmy od obu stron y^2. Otrzymamy:

$$x^2 = z^2 - y^2.$$

Zgodnie ze wzorem skróconego mnożenia sumy i różnicy dwóch takich samych liczb możemy napisać:

$$x^2 = (z+y)(z-y).$$

Zarówno suma, jak i różnica liczb z i y są parzyste, zatem istnieją takie liczby naturalne T i U, że

$$z + y = 2T,$$

$$z - y = 2U,$$

wtedy

$$x^2 = z^2 - y^2 = (z+y)(z-y) = 4UT.$$

Liczby U i T są względnie pierwsze. Gdyby bowiem miały jakiś wspólny dzielnik $d > 1$, to d byłoby także dzielnikiem:

$$z = T + U \text{ i } y = U - T,$$

a wiemy, że liczby x i y są względnie pierwsze.

Udowodnimy teraz, że liczby U i T są kwadratami pewnych liczb naturalnych. Oprzemy się na twierdzeniu o rozkładzie liczb naturalnych na czynniki pierwsze, które mówi, że każda liczba naturalna rozkłada się w jeden tylko sposób (jeśli nie uwzględniać kolejności czynników) na iloczyn czynników pierwszych. Mamy

$$UT = \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \left(p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r}\right)^2 = p_1^{2\alpha_1} \cdot p_2^{2\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{2\alpha_r}.$$

Liczby U i T możemy przedstawić jako

$$U = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{\beta_r},$$

$$T = p_1^{\gamma_1} \cdot p_2^{\gamma_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{\gamma_r},$$

gdzie $2\alpha_i = \beta_i + \gamma_i$ ($i = 1, 2, \ldots, r$). Ponieważ jednak liczby U i T są względnie pierwsze, to przy każdym i jedna z liczb β_i lub γ_i jest równa zeru i dlatego druga jest równa $2\alpha_i$. Wszystkie wykładniki w rozkładach U i T na czynniki pierwsze są zatem parzyste, z czego wynika, że każda z tych liczb jest kwadratem pewnej liczby naturalnej $U = u^2$, $T = t^2$, stąd

$$x = 2ut, \quad y = u^2 - t^2, \quad z = u^2 + t^2. \qquad (*)$$

Zatem każda trójka pitagorejska może być przedstawiona w postaci (*), gdzie u i t są liczbami naturalnymi względnie pierwszymi, z których jedna jest parzysta, a druga nieparzysta (w przeciwnym razie obie liczby z i y byłyby parzyste) oraz $u > t$.

Prawdziwe jest również i odwrotne twierdzenie, zgodnie z którym dla dowolnych liczb naturalnych względnie pierwszych t i u ($u > t$), z których jedna jest parzysta, a druga nieparzysta, liczby x, y, z określone wzorami (*) dają rozwiązania równania $x^2 + y^2 = z^2$ w liczbach naturalnych względnie pierwszych. Mamy bowiem

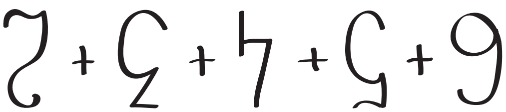
$$x^2 + y^2 = 4u^2t^2 + \left(u^2 - t^2\right)^2 = \left(u^2 + t^2\right)^2 = z^2.$$

Ponadto jeśli liczby y i z byłyby podzielne przez liczbę pierwszą p, to również liczby $z - y = 2t^2$ i $x + y = 2u^2$ byłyby podzielne przez p, a ponieważ p nie może być równe 2 (gdyż jedna z liczb t i u jest parzysta, a druga nieparzysta), to liczby y i z są nieparzyste, więc liczby u i t musiałyby być podzielne przez p wbrew założeniu, że są względnie pierwsze.

Zatem liczby y i z, a więc również wszystkie trzy: x, y i z, są parami względnie pierwsze. W ten sposób wzory (*) dla liczb t i u ($u > t$) względnie pierwszych, jednej parzystej, a drugiej nieparzystej, dają wszystkie rozwiązania równania $x^2 + y^2 = z^2$ w liczbach naturalnych.

15.

Szereg odwrotności liczb naturalnych



Już w pierwszej klasie szkoły podstawowej uczymy się dodawać i nie wydaje nam się to o wiele trudniejsze od liczenia na palcach. Na początku opanowujemy sztukę dodawania dwóch liczb, potem okazuje się, że można dodawać trzy, cztery i w ogóle dowolną skończoną ich ilość. Jesteśmy pewni, że wynik takiego dodawania zawsze jest jakąś liczbą, nawet jeśli jej nie znamy. A jeśli ktoś poleci nam zsumować nieskończenie wiele liczb dodatnich? Myślę, że wiele osób bez wahania odpowie, że suma nieskończenie wielu liczb dodatnich musi być również nieskończona, tak jak w przypadku poniższych sum.

$$1+1+1+\ldots$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ \ldots$$

$$0{,}2+0{,}2+0{,}2+\ \ldots$$

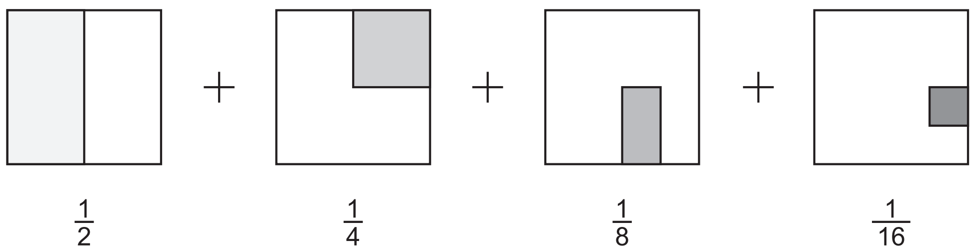
$$\frac{1}{100}+\frac{1}{100}+\frac{1}{100}+\ \ldots$$

Trzy kropki na końcu wszystkich powyższych wyrażeń oznaczają tu sumowanie nieskończenie wielu składników.

Spróbujmy jednak przyjrzeć się sumie

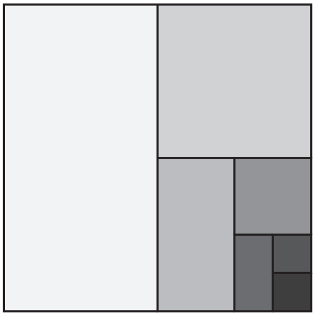
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ \ldots,$$

której każdy kolejny składnik jest o połowę mniejszy. Czy wartość tej sumy też jest nieskończona? Nie mając do badania tego problemu innych narzędzi oprócz zdrowego rozsądku, potraktujemy kolejne wyrazy szeregu jak pola wycinków kwadratu o boku 1. Zastąpmy na chwilę liczby wycinkami kwadratu (jak na rysunku 15.1).



Rysunek 15.1. *Kwadrat o boku 1*

Po nałożeniu tych rysunków otrzymamy kwadrat widoczny na rysunku 15.2.



Rysunek 15.2. *Ułamki pola kwadratu*

Z tego rysunku widać, że dodając kolejne wyrazy naszej sumy, nigdy nie przekroczymy pola dużego kwadratu, widać również, że z każdym dodanym wyrazem suma jest coraz bliższa wartości 1 — pola całego kwadratu.

Czy nie jest to coś dziwnego? Oto mamy sumę nieskończenie wielu składników, która sama jest skończona. Jak rozpoznać, które z takich sum są skończone, a które nieskończone? Nie ma na to pytanie jednej łatwej odpowiedzi, możemy natomiast z całą pewnością stwierdzić, jaki jest warunek konieczny do tego, żeby taka suma istniała. Warunek konieczny to taki, bez którego spełnienia suma z pewnością nie jest skończona, który nie zapewnia jej istnienia. Warunkiem koniecznym istnienia skończonej sumy nieskończonego szeregu jest tak zwana zbieżność do zera ciągu jego kolejnych składników. Krótko mówiąc, jeśli kolejne wyrazy różnią się od zera o coraz mniejszą wartość — robi się ona dowolnie mała — to możliwe jest, że dany szereg ma skończoną sumę. W przeciwnym wypadku jest to wykluczone. Dlatego łatwo możemy stwierdzić, że szeregi:

$$1+2+3+4+\ldots$$

$$1+1+1+1+\ldots$$

$$0{,}01+0{,}01+0{,}01+\ldots$$

nie mają skończonych sum. Natomiast nasz pierwszy odkryty szereg nieskończony ze skończoną sumą:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=1$$

spełnia oczywiście warunek konieczny zbieżności — różnica pomiędzy zerem i kolejnymi wyrazami staje się dowolnie mała, jeśli tylko weźmiemy dostatecznie daleki jego wyraz. Czy każdy szereg nieskończony spełniający warunek konieczny ma skończoną sumę? Pytanie to w żargonie matematycznym brzmiałoby tak: czy warunek konieczny zbieżności szeregu jest jednocześnie warunkiem dostatecznym (wystarczającym)? Zbadajmy ten problem na przykładzie innego szeregu nieskończonego.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots$$

Jak widać, jego kolejne wyrazy są odwrotnościami kolejnych liczb naturalnych. Matematycy nazywają ten szereg harmonicznym. Spełnia on warunek konieczny, bez którego spełnienia nawet nie zastanawialibyśmy się nad tym, czy ma on skończoną sumę, bo, jak już mówiliśmy, z niespełnienia koniecznego warunku zbieżności wynika brak skończonej sumy. Na tym polega przecież konieczność warunku. Pokażemy, że nie jest to warunek dostateczny, bo szereg harmoniczny nie ma stałej sumy.

Zauważmy, że

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}>\underbrace{\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{16}}_{\text{8 razy}}=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$$

i ogólnie dla dowolnego n

$$\frac{1}{2^n+1}+\frac{1}{2^n+2}+\ldots+\frac{1}{2^n+2^n-1}+\frac{1}{2^{n+1}}>\frac{2^n}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}.$$

Gdyby zatem istniała skończona suma szeregu harmonicznego

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots,$$

nie mogłaby być mniejsza od sumy szeregu

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots,$$

który jest szeregiem rozbieżnym — jego suma jest większa niż każda liczba dodatnia. Szereg harmoniczny jest zatem rozbieżny.

Skorowidz

W

Z


PROGRAM PARTNERSKI
GRUPY WYDAWNICZEJ HELION
1. ZAREJESTRUJ SIĘ
2. PREZENTUJ KSIĄŻKI
3. ZBIERAJ PROWIZJĘ
Zmień swoją stronę WWW
w działający bankomat!
Dowiedz się więcej i dołącz już dzisiaj!
http://program-partnerski.helion.pl
GRUPA WYDAWNICZA
Helion SA

Profesor na wykładzie myśli A, mówi B, a na tablicy pisze C. A student słyszy D, widzi E, do kajetu pisze F, a i tak nic z tego nie rozumie.

prof. L. Jeśmanowicz

Większości z nas matematyka kojarzy się ze zlepkiem niezrozumiałych twierdzeń, ślęczeniem nad zeszytami i strużką potu na czole podczas zmagań pod tablicą. W dodatku — bez względu na to, czy darzysz królową nauk gorącą miłością, czy też nie — na którymś etapie życia po prostu musisz ją zaliczyć. To jednak nie musi być droga przez mękę! Okazuje się bowiem, że pozaszkolna matematyka to naprawdę świetna zabawa, sensacyjne odkrycia i fascynujące opowieści. Nie na darmo przecież matematyk i publicysta Michał Szurek twierdzi, że „matematyka jest jedyną humanistyczną nauką ścisłą". Trudno Ci w to uwierzyć? W takim razie **potrzebujesz dowodu**!

Ta książeczka jest Twoim biletem wstępu do tej części matematyki, która większości (także wykształconych) ludzi wydaje się niedostępna, a może nawet dziwna. I jeśli pragniesz ją jak najszybciej odłożyć, dowiedz się, że jest ona właśnie dla Ciebie! Zamieszczone tu dowody czyta się jak zwykłe opowieści, choć nie skutkuje to najmniejszym uszczerbkiem na ich ścisłości. Dla zrozumienia wszystkich dowodów wystarcza znajomość matematyki na poziomie szkoły średniej, a większość rozdziałów jest odpowiednia także dla gimnazjalistów. Po lekturze niektóre matematyczne zawiłości zaczniesz rozgryzać w sposób iście lekkoatletyczny — „Rzut oka na tablicę i wszystko widać".

Dariusz Laskowski – za swoją misję uważa doprowadzenie do zmiany dominującej współcześnie w podręcznikach do matematyki maniery przedstawiania dowodów w bardzo oszczędny sposób, co przyczynia się do ich niezrozumienia. Bierze więc na siebie obowiązek oswajania dowodów. W niniejszej książce autor postawił sobie za cel zaprezentowanie ich w formie zrozumiałej dla zainteresowanego matematyką laika, a Ty, Czytelniku, sprawdź, czy mu się to udało!

helion.pl
księgarnia internetowa

Nr katalogowy: 6198

Księgarnia internetowa:
http://helion.pl

Zamówienia telefoniczne:
0 801 339900
0 601 339900

Helion

Sprawdź najnowsze promocje:
http://helion.pl/promocje
Książki najchętniej czytane:
http://helion.pl/bestsellery
Zamów informacje o nowościach:
http://helion.pl/nowosci

Helion SA
ul. Kościuszki 1c, 44-100 Gliwice
tel.: 32 230 98 63
e-mail: helion@helion.pl
http://helion.pl

ISBN 978-83-246-3404-0

9788324634040

Informatyka w najlepszym wydaniu