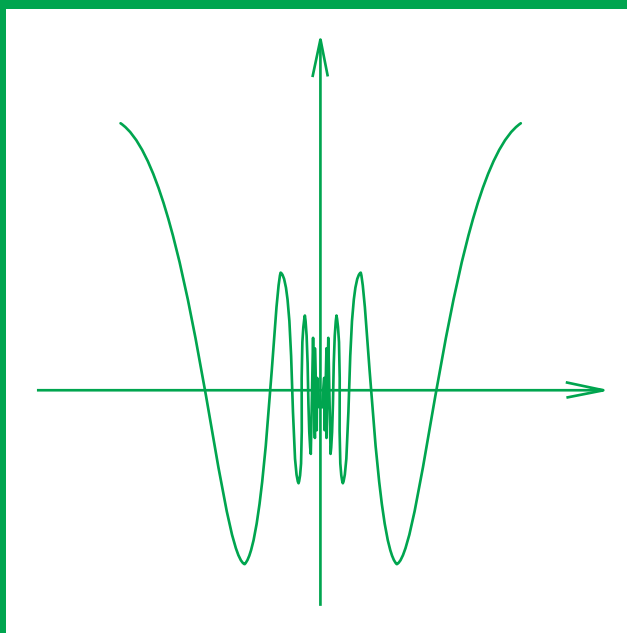


Joanna Ger

# Kurs matematyki dla chemików



---

Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego



Katowice 2012

# Kurs matematyki dla chemików



nr 136

Joanna Ger

# Kurs matematyki dla chemików

Wydanie piąte poprawione

---

Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego



Katowice 2012

Redaktor serii: Matematyka  
**Tomawsz Dłotko**

Recenzenci I wydania  
**Józef Banaś**  
**Stanisław Stoiński**

# Spis treści

---

<b>Przedmowa</b> . . . . .	9
<b>1. Elementy logiki matematycznej i teorii mnogości</b> . . . . .	11
1.1. Elementy rachunku zdań . . . . .	11
1.2. Elementy rachunku kwantyfikatorowego . . . . .	13
1.3. Rachunek zbiorów . . . . .	15
1.4. Odwzorowania . . . . .	17
1.5. Zadania . . . . .	21
<b>2. Liczby rzeczywiste i zespolone. Funkcje elementarne</b> . . . . .	23
2.1. Własności zbioru liczb rzeczywistych . . . . .	23
2.2. Funkcje monotoniczne i wypukłe . . . . .	30
2.3. Funkcje elementarne . . . . .	34
2.4. Liczby zespolone . . . . .	51
2.5. Zadania . . . . .	58
<b>3. Elementy algebry liniowej</b> . . . . .	61
3.1. Macierze . . . . .	61
3.2. Wyznaczniki . . . . .	65
3.3. Wzory Cramera . . . . .	74
3.4. Układy liniowe . . . . .	80
3.5. Przestrzenie liniowe . . . . .	84
3.6. Baza i wymiar przestrzeni liniowej . . . . .	88
3.7. Rachunek wektorowy w $\mathbb{R}^n$ . . . . .	94
3.8. Odwzorowania liniowe . . . . .	99
3.9. Grupa przekształceń liniowych na płaszczyźnie . . . . .	108
3.10. Zadania . . . . .	110

<b>4. Ciągi i szeregi</b>	113
4.1. Ciągi liczbowe i ich własności	113
4.2. Granica ciągu rzeczywistego i jej własności	116
4.3. Granice niewłaściwe	132
4.4. Zbieżność w przestrzeniach $\mathbb{R}^k$ ( $k \in \mathbb{N}$ )	135
4.5. Szeregi liczbowe	136
4.6. Kryteria zbieżności szeregów	140
4.7. Szeregi potęgowe	148
4.8. Zadania	151
<b>5. Granica i ciągłość odwzorowań</b>	153
5.1. Pewne szczególne podzbiory $\mathbb{R}^n$	153
5.2. Granica odwzorowania	158
5.3. Własności granic funkcji	161
5.4. Ciągłość odwzorowań	165
5.5. Własności odwzorowań ciągłych w zbiorach zwartych	169
5.6. Dalsze własności funkcji ciągłych	171
5.7. Granice pewnych szczególnych funkcji	179
5.8. Ciągłość funkcji elementarnych	184
5.9. Zadania	188
<b>6. Rachunek różniczkowy funkcji jednej zmiennej</b>	191
6.1. Iloraz różnicowy i pochodna	191
6.2. Interpretacja pochodnej	194
6.3. Pochodne funkcji elementarnych	195
6.4. Działania na pochodnych	197
6.5. Pochodna funkcji odwrotnej	199
6.6. Pochodna funkcji złożonej	201
6.7. Różniczka funkcji	203
6.8. Pochodne wyższych rzędów	204
6.9. Twierdzenia o wartości średniej	205
6.10. Wnioski z twierdzeń o wartości średniej	209
6.11. Ekstrema funkcji	216
6.12. Wypukłość i punkty przegięcia funkcji	219
6.13. Asymptoty	220

6.14. Wyrażenia nieoznaczone i reguła de l'Hospitala . . . . .	221
6.15. Badanie przebiegu zmienności funkcji . . . . .	224
6.16. Szereg Taylora . . . . .	226
6.17. Całka nieoznaczona . . . . .	231
6.18. Zadania . . . . .	242
<b>7. Całka oznaczona na prostej . . . . .</b>	<b>245</b>
7.1. Definicje . . . . .	245
7.2. Całkowalność pewnych klas funkcji . . . . .	248
7.3. Własności całki . . . . .	251
7.4. Interpretacja geometryczna całki . . . . .	262
7.5. Funkcja górnej granicy całkowania . . . . .	263
7.6. Twierdzenia o wartości średniej . . . . .	269
7.7. Całki niewłaściwe . . . . .	271
7.8. Krzywe w $\mathbb{R}^n$ . . . . .	278
7.9. Zadania . . . . .	283
<b>8. Rachunek różniczkowy w przestrzeniach <math>\mathbb{R}^n</math> . . . . .</b>	<b>285</b>
8.1. Definicja różniczki . . . . .	285
8.2. Pochodne cząstkowe . . . . .	287
8.3. Formalne prawa różniczkowania . . . . .	294
8.4. Pochodne cząstkowe wyższych rzędów i wzór Taylora . . . . .	300
8.5. Ekstrema funkcji wielu zmiennych . . . . .	305
8.6. Funkcje uwikłane . . . . .	311
8.7. Ekstrema warunkowe . . . . .	316
8.8. Zadania . . . . .	323
<b>9. Całka oznaczona Riemanna w przestrzeni <math>\mathbb{R}^n</math>. . . . .</b>	<b>325</b>
9.1. Definicja $n$ -wymiarowej całki Riemanna . . . . .	325
9.2. Własności całki . . . . .	329
9.3. Całki iterowane i ich związek z całką w $\mathbb{R}^n$ . . . . .	332
9.4. Całki w obszarach normalnych w $\mathbb{R}^2$ . . . . .	340
9.5. Powierzchnie w $\mathbb{R}^3$ . . . . .	347
9.6. Całki w obszarach normalnych w $\mathbb{R}^3$ . . . . .	349
9.7. Zastosowanie do zagadnień fizyki . . . . .	353



---

9.8. Zadania . . . . .	359
<b>10. Całka krzywoliniowa . . . . .</b>	<b>361</b>
10.1. Orientacja krzywej . . . . .	361
10.2. Całka niezorientowana . . . . .	365
10.3. Całka krzywoliniowa zorientowana . . . . .	368
10.4. Twierdzenie Greena . . . . .	373
10.5. Niezależność całki od drogi całkowania . . . . .	377
10.6. Interpretacja wektorowa . . . . .	380
10.7. Zadania . . . . .	384
<b>11. Całka powierzchniowa . . . . .</b>	<b>387</b>
11.1. Całka powierzchniowa niezorientowana . . . . .	387
11.2. Całka powierzchniowa zorientowana . . . . .	391
11.3. Zadania . . . . .	397
<b>12. Elementy teorii równań różniczkowych zwyczajnych . . . . .</b>	<b>399</b>
12.1. Uwagi wstępne . . . . .	399
12.2. Pojęcie równania różniczkowego zwyczajnego rzędu pierwszego . . . . .	401
12.3. Problem Cauchy'ego dla równania różniczkowego rzędu pierwszego . . . . .	403
12.4. Pewne szczególne typy równań różniczkowych . . . . .	410
12.5. Układy równań liniowych rzędu pierwszego . . . . .	422
12.6. Równania liniowe $n$ -tego rzędu o stałych współczynnikach . . . . .	430
12.7. Zadania . . . . .	441
<b>Literatura . . . . .</b>	<b>442</b>
<b>Skorowidz . . . . .</b>	<b>443</b>

# Przedmowa

---

Program studiów uniwersyteckich na kierunku chemii przewiduje w ramach pierwszego roku wykład podstawowych pojęć matematycznych. Wykład ten ma być użyteczny również w dalszym kształceniu chemików, dlatego poruszane zagadnienia muszą obejmować takie dziedziny matematyki, jak: rachunek różniczkowy i całkowy, równania różniczkowe, algebra liniowa i ogólna. Wszelako ograniczona liczba godzin wykładu nie pozwala na tak głębokie potraktowanie poruszanych tematów, jak tego pragnąłby wykładowca – matematyk.

Przez wiele lat wykładałam matematykę na pierwszym roku chemii w Uniwersytecie Śląskim, starając się zwalczać pokusę „przematematyzowania” z jednej strony, oraz pokusę zamiany wykładu w spis formułek i twierdzeń z drugiej.

Doświadczenie to, a także ścisły kontakt z pracownikami Instytutu Chemii i studentami podsunęły pomysł napisania skryptu, który zawierałby wiedzę matematyczną niezbędną do studiowania chemii uniwersyteckiej. Skrypt z założenia ma służyć słuchaczom wykładu.

Rezygnując z najbardziej ogólnego przedstawienia materiału, nie rezygnuję ze ścisłości rozumowania. Wszystkie dowody zatem są szczegółowe, chociaż część twierdzeń jest wypowiedziana mniej ogólnie niż można by to uczynić, biorąc pod uwagę obecną wiedzę matematyczną. Niektóre trudniejsze dowody zostały wszakże pominięte lub przeprowadzone w szczególnych przypadkach.

Ponieważ skrypt ma z założenia charakter podręcznika zawierającego wszystkie potrzebne wiadomości, pierwsze rozdziały poświęcone są wprowadzeniu pojęć podstawowych. Znajdziemy tu elementy logiki oraz definicje wielu pojęć. W rozdziale II zdefiniowane są funkcje elementarne. Wiadomości z algebry liniowej zamieszczono w rozdziale III. Pozostałe

rozdziały obejmują teorię rachunku różniczkowego i całkowego, najpierw na prostej, a potem w przestrzeniach euklidesowych. W ostatnim rozdziale omawiam równania różniczkowe, uwzględniając tak ważne dla chemików równanie Schrödingera.

Wykładowi matematyki towarzyszą ćwiczenia, w obrębie których są rozwiązywane zadania ilustrujące „teorię”. Nie rezygnuję jednak z zamieszczenia po każdym rozdziale zadań, które Czytelnik powinien rozwiązać bez kłopotu po zapoznaniu się z treścią danego rozdziału. Aby mu ułatwić zrozumienie tej treści, zamieszczam liczne przykłady pokazujące, jak rozwiązać typowe problemy z użyciem wyłożonych twierdzeń.

Na końcu skryptu zamieściłam literaturę, z której korzystałam, pisząc ten skrypt.

Jeszcze raz podkreślam, że skrypt odpowiada treścią i objętością wykładowi prowadzonemu w Uniwersytecie Śląskim. W szczególności, ze względu na znaczną redukcję godzin tego wykładu w ostatnich latach (90 godz. zamiast 120 godz.), nie może on już obejmować tak ważnego działu, jakim jest rachunek prawdopodobieństwa.

Pokonanie rozmaitych trudności, jakie niejednokrotnie pojawiały się w trakcie przygotowywania tego skryptu, zawdzięczam mojemu mężowi Romanowi, który wnikliwie czytał każdy kolejny rozdział. Jego liczne uwagi dotyczące zarówno układu przedstawianych treści, jak i ich merytorycznego i redakcyjnego ujęcia, poważnie wpłynęły na kształt skryptu. Pragnę mu podziękować za to bardzo serdecznie. Miło mi także złożyć wyrazy podziękowania panu Maciejowi Sablikowi za wiele cennych uwag i spostrzeżeń, które wykorzystałam, przygotowując ten skrypt. *Last but not least* – dziękuję pani Aleksandrze Hankus za wykonanie składu komputerowego tekstu, panu Adamowi Stolarzewiczowi za komputerowe zaprojektowanie rysunków oraz panu Adamowi Kolany za przetłumaczenie ich na język postscript-u.

Joanna Ger

Katowice, 15 kwietnia 2003 roku

# Skorowidz

---

## Aksjomat ciągłości, 28

alternatywa, 11, 12

asymptota

    pionowa, 221

    ukośna, 220

## Całka

    bezwzględnie zbieżna, 275

    dolna, 247, 327

    górna, 247, 327

    iterowana, 333

    krzywoliniowa niezorientowana, 366

    krzywoliniowa zorientowana, 369

    nieoznaczona, 232

    niewłaściwa, 271

    odwzorowania, 400

    powierzchniowa niezorientowana, 387

    powierzchniowa zorientowana, 391

    Riemanna, 247, 327

    warunkowo zbieżna, 275

    zbieżna, 275

cecha, 32

ciąg

    granica, 116

    malejący, 120

    monotoniczny, 114, 120

    rosnący, 113

    rozbieżny do nieskończoności, 132

    wektorów, 135

ciało, 86

cyrkulacja pola, 384

## Ekstremum

    absolutne, 172

    lokalne, 172

    warunkowe, 317

## Funkcja

    całkowalna, 233, 234

    Dirichleta, 32

    górnjej granicy całkowania, 263

    klasy  $C^n$ , 204

    malejąca, 31

    monotoniczna, 30

    niemalejąca, 30

    nieparzysta, 31

    nierosnąca, 30

    okresowa, 31

    parzysta, 31

    pierwotna, 231

    różniczkowalna w przedziale, 193

    różniczkowalna w punkcie, 192

    rosnąca, 30

    słabo malejąca, 30

    słabo rosnąca, 30

    silnie malejąca, 30

    silnie rosnąca, 30

    wartość średnia, 205

    wymierna, 34

    zdaniowa, 12, 14

funkcje elementarne, 34

    ciągłość, 168

    cyklometryczne, 34

    homografie, 34

    logarytmiczne, 36

    potęgowe, 34

    trygonometryczne, 44

    wielomiany, 34

    wykładnicze, 36

    wymierne, 34

Gradient, 292

grupa, 84

    przemienna, 85

- Iloczyn**  
 kartezyjski, 19  
 skalarny, 96  
 zbiorów, 15  
 iloraz różnicowy, 191  
 implikacja, 11
- Jednokładność**, 108
- Koniunkcja**, 11  
 kryterium  
 Cauchy'ego, 142  
 d'Alemberta, 144  
 porównawcze, 140, 142  
 krzywa, 278  
 parametryzacja, 278  
 regularna, 279
- kula, 98
- kwantyfikator  
 duży, 14  
 mały, 14
- Liczba zespolona**, 51  
 argument, 56  
 postać trygonometryczna, 56  
 sprzężona, 52  
 wartość bezwzględna, 55
- Macierz**, 61  
 diagonalna, 67  
 iloczyn, 62  
 jednostkowa, 65  
 kwadratowa, 61  
 minor, 66  
 nieosobliwa, 71  
 odwrotna, 71  
 rząd, 79  
 stopień, 61  
 suma, 62  
 transponowana, 65  
 uzupełniona, 80  
 wyznacznik, 65
- maksimum  
 absolutne, 172  
 lokalne, 172
- minimum  
 absolutne, 172  
 lokalne, 172
- Negacja**, 12  
 nierówność Schwarza, 95, 260
- Obrót**, 109  
 obszar normalny, 340  
 odwzorowanie, 17  
 ciągłość, 165  
 granica, 159  
 jednostajna ciągłość, 167  
 liniowe, 99  
 odwracalne, 18  
 odwrotne, 20  
 różniczka, 203  
 różnowartościowe, 18  
 superpozycja, 18  
 wartości własne, 105  
 wykres, 20
- orientacja, 361  
 krzywej, 362  
 płata, 391  
 otoczenie, 153
- Para uporządkowana**, 19  
 płaszczyzna styczna, 348  
 płąt powierzchniowy, 347  
 pewnik Archimidesa, 29  
 pochodna  
 cząstkowa, 289  
 funkcji, 191  
 kierunkowa, 289  
 lewostronna, 193  
 mieszana, 301  
 odwzorowania, 291  
 prawostronna, 193
- pole wektorowe, 380  
 potencjał pola, 380  
 problem Cauchy'ego, 402  
 prosta styczna, 194  
 przedział  
 domknięty, 26  
 otwarty, 26
- przestrzeń  
 euklidesowa, 97  
 liniowa, 87

- punkt  
przebiegła, 219
- Reguła de l'Hospitala**, 221
- różnica zbiorów, 15
- różniczka, 203
- równanie charakterystyczne, 105
- równanie różniczkowe  
Bernoulliego, 420  
liniowe o stałych współczynnikach, 431  
liniowe rzędu pierwszego, 414  
o zmiennych rozdzielonych, 410  
zwyczajne, 401
- reszta  
Cauchy'ego, 216  
Lagrange'a, 216
- rotacja pola, 380
- Sąsiedztwo**, 154
- Schrödingera równanie, 436
- suma  
dolna, 246  
górną, 246  
zbiorów, 15
- symbol Newtona, 25
- szereg  
geometryczny, 139  
harmoniczny, 138  
liczbowy, 136  
Maclaurina, 227  
potęgowy, 148  
promień zbieżności, 149  
przedział zbieżności, 150  
przemienny, 147  
suma, 136  
Taylora, 227  
zbieżny, 136
- Twierdzenie**  
Bolzano–Weierstrassa, 121  
Cauchy'ego, 145, 206  
Cauchy'ego–Hadamarda, 149  
Cramera, 75  
Gaussa–Ostrogradskiego, 394  
Greena, 373  
Kroneckera–Capelliego, 81
- Lagrange'a, 206  
o całkowalności funkcji ciągłych, 249  
o całkowaniu przez części, 267  
o całkowaniu przez podstawienie, 267  
o funkcji uwikłanej, 312, 316  
o istnieniu i jednoznaczności, 403  
o lokalnej odwracalności odwzorowań, 298  
o trzech ciągach, 127  
o wartości średniej, 269  
o zmianie zmiennych, 268, 344  
Rolle'a, 205  
Stokesa, 396
- Układ**  
Cramera, 74  
jednorodny, 78  
sprzężony, 81  
ułamek prosty, 238
- Warunek trójkąta**, 94
- własność Darboux, 175
- wektory  
długość, 94  
liniowo niezależne, 88  
liniowo zależne, 89  
prostokątne, 97  
równoległe, 97  
własne, 104
- wielomian charakterystyczny, 105
- wyrażenie nieoznaczone, 221
- wzór  
Cramera, 76  
de Moivre'a, 57  
Maclaurina, 216  
Newtona–Leibniza, 265  
Taylora, 216
- Zaprzeczenie**, 12
- zbiór  
brzeg, 156  
domknięcie, 156  
domknięty, 155  
dopełnienie, 15  
kres dolny, 28  
kres górny, 28

nieprzeliczalny, 19  
nieskończony, 16  
ograniczony, 27, 157  
ograniczony z dołu, 27  
ograniczony z góry, 27  
otwarty, 154  
podzbiór, 15  
przeliczalny, 19  
punkt izolowany, 157  
punkt skupienia, 156  
skończony, 16  
wnętrze, 154  
zwarty, 158  
zbiory  
równoliczne, 19  
rozłączne, 15

Redakcja  
**Grażyna Wojdała**

Skład i łamanie  
**Aleksandra Hankus**

Copyright © 2012 by  
Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego  
Wszelkie prawa zastrzeżone

**ISSN 1644-0552**  
**ISBN 978-83-226-2142-4**  
(wersja drukowana)  
**ISBN 978-83-8012-542-1**  
(wersja elektroniczna)

Wydawca  
**Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego**  
**ul. Bankowa 12B, 40-007 Katowice**  
[www.wydawnictwo.us.edu.pl](http://www.wydawnictwo.us.edu.pl)  
e-mail: [wydawus@us.edu.pl](mailto:wydawus@us.edu.pl)

---

Wydanie V. Nakład 150 + 50 egz. Ark. wyd. 27,5.  
Ark. druk. 28. Papier offset kl. III, 90 g.  
Cena 38 zł (+VAT)

---

Druk i oprawa: PPHU TOTEM s.c.  
M. Rejnowski, J. Zamiara  
ul. Jacewska 89, 88-100 Inowrocław



# Joanna Ger – Kurs matematyki dla chemików

Cena 38 zł (+ VAT)

ISSN 1644-0552  
ISBN 978-83-8012-542-1