



Wszelkie prawa zastrzeżone. Nieautoryzowane rozpowszechnianie całości lub fragmentu niniejszej publikacji w jakiegokolwiek postaci jest zabronione. Wykonywanie kopii metodą kserograficzną, fotograficzną, a także kopiowanie książki na nośniku filmowym, magnetycznym lub innym powoduje naruszenie praw autorskich niniejszej publikacji.

Wszystkie znaki występujące w tekście są zastrzeżonymi znakami firmowymi bądź towarowymi ich właścicieli.

Autor oraz Wydawnictwo HELION dołożyli wszelkich starań, by zawarte w tej książce informacje były kompletne i rzetelne. Nie biorą jednak żadnej odpowiedzialności ani za ich wykorzystanie, ani za związane z tym ewentualne naruszenie praw patentowych lub autorskich. Autor oraz Wydawnictwo HELION nie ponoszą również żadnej odpowiedzialności za ewentualne szkody wynikłe z wykorzystania informacji zawartych w książce.

Redaktor prowadzący: Tomasz Waryszak

Projekt okładki: ULABUKA

Skład: Marcin Chłąd

Materiały graficzne na okładce zostały wykorzystane za zgodą Shutterstock.com

Wydawnictwo HELION

ul. Kościuszki 1c, 44-100 GLIWICE

tel. 32 231 22 19, 32 230 98 63

e-mail: [helion@helion.pl](mailto:helion@helion.pl)

WWW: <http://helion.pl> (księgarnia internetowa, katalog książek)

Drogi Czytelniku!

Jeżeli chcesz ocenić tę książkę, zajrzyj pod adres

<http://helion.pl/user/opinie?matszk>

Możesz tam wpisać swoje uwagi, spostrzeżenia, recenzję.

Kody źródłowe wybranych przykładów dostępne są pod adresem:

<ftp://ftp.helion.pl/przyklady/matszk.zip>

ISBN: 978-83-246-4770-5

Copyright © Helion 2012

Printed in Poland.

- [Kup książkę](#)
- [Poleć książkę](#)
- [Oceń książkę](#)

- [Księgarnia internetowa](#)
- [Lubię to! » Nasza społeczność](#)



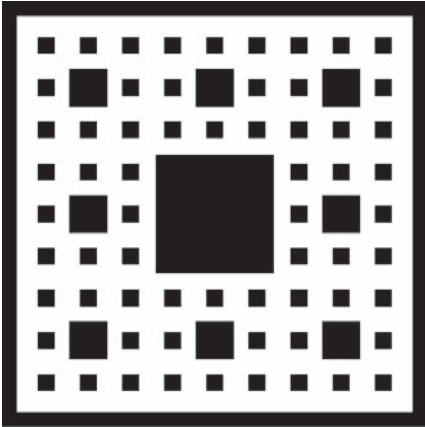
# Spis treści

<b>Wstęp</b> .....	6
<b>1. W kolejce po bułki</b> .....	7
<b>2. Spotkanie u Jacha i Krzycha</b> .....	13
<b>3. Czasu nie ma, są tylko zegary</b> .....	17
<b>4. Na skraju lasu</b> .....	21
<b>5. Pułapka na pana Czesława</b> .....	29
<b>6. Kalendarz w jednym wzorze</b> .....	35
<b>7. Jachu w pułapce jasnowłosej</b> .....	39
<b>8. Ile zarabia Totalizator Sportowy</b> .....	43
<b>9. Nie psuj mi szyków</b> .....	47
<b>10. Wodne mistrzostwa piłkarskie</b> .....	55
<b>11. Kanciaste kotki</b> .....	61
<b>12. Karciana sztuczka</b> .....	69

.....

13. Ryby a statystyka.....	75
14. Jak zostać oszustem .....	79
15. Geometria bazgrołów.....	83
16. Moc jedności .....	101
17. Po co nam liczby pierwsze.....	107
18. Karton na tik-taki .....	113
19. Zbiory Julii.....	119
20. Ile liczb mieści się na końcu igły.....	127
21. Pranie pieluch.....	133
22. Jak szybko spada spadochroniarz .....	143
23. Liczba Eugeniusza.....	149
<b>Bibliografia .....</b>	<b>164</b>
<b>Skorowidz .....</b>	<b>166</b>

## Zbiory Julii



— Zabieram cię na wystawę obrazów generowanych komputerowo, której tytuł brzmi *Zbiory Julii* — oznajmił uroczyście Jachu zdziwionemu niecodziennym pomysłem przyjacielowi.

— Dziś na wystawę jest wstęp wolny, a poza tym co jakiś czas trzeba mieć kontakt ze sztuką, choćby i tworzoną przez komputer.

Krzychu poddał się milcząco rozporządzeniu Jacha i po krótkim marszu, dla zdrowia i zaoszczędzenia pieniędzy za przejazd, byli już na wystawie. Po obejrzeniu pierwszych obrazów Krzychu nie krył swojego rozczarowania.

— Sądząc po nazwie, spodziewałem się tu zobaczyć obrazy kobiety, jakieś portrety, surrealistyczne pejzaże, a tymczasem plamy jakieś widzę. Może to i ładne jest, ale co ma do tego Julia?

— Julia [wym. Żulia] był francuskim matematykiem, który odkrył te plamy i pokazał, jak je otrzymywać jeszcze w erze przedkomputerowej. Ich powtórne odkrycie zawdzięczamy niezującym już matematykowi. Benoit Mandelbrot był twórcą pojęcia fraktala — wymądrzał się Jachu, korzystając z treści wcześniej przeczytanej ulotki, którą dostał przy wejściu na wystawę.

— Jak komputery mogą tworzyć te obrazy? — zastanawiał się Krzychu już w nieco lepszym humorze, bo choć to nie były obrazy, których się spodziewał, to wśród licznie przybyłych na wystawę znalazł obiekty pięknie wyrzeźbione przez naturę, którym mógł się długo przyglądać, tak były pochłonięte podziwianiem rozwieszonych wszędzie czarno-białych eksponatów.

— Patrz na tę w rogu po przeciwnej stronie sali — szepnął do Jacha, który zastanawiał się, czy jego przyjaciel ma na myśli obraz przypominający delikatną koronkę, czy blondynkę o zamysłonej twarzy wpatrującą się w ten obraz. — Niezła figura.

Jachu jednak powoli przestawiał się na odbiór generowanych przez komputer obrazów i próbował sobie wyobrazić proces ich tworzenia. Przypominały mu chmury, bajkowe stwory, wzory tworzone na szybach przez mróz.

## Komentarz

Spróbujemy wyjaśnić, jak komputer może generować obrazy, które bezsprzecznie mają walory artystyczne. Ponieważ mówimy tu o obrazach tworzonych na płaszczyźnie, więc zajmijmy się na początek płaszczyzną. Zacznijmy od tego, że po umieszczeniu na płaszczyźnie dwóch osi współrzędnych położenie każdego punktu możemy określić za pomocą dwóch liczb, podobnie jak na osi liczbowej za pomocą jednej — jego odległości od punktu 0 wziętej ze znakiem plus albo minus w zależności od położenia punktu względem zera. Podobnie też jak na liczbach możemy rachować na parach liczb — możemy je dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić. Żeby wszystkie te działania były podobne do działań na liczbach rzeczywistych, wyrażone są one za pomocą poniższych wzorów:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b) - (c, d) = (a - c, b - d)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (a \cdot c - b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c)$$

$$(a, b) / (c, d) = \left( \frac{a \cdot c + b \cdot d}{c^2 + d^2}, \frac{b \cdot c - a \cdot d}{c^2 + d^2} \right), \text{ oprócz przypadku, gdy}$$

$$(c, d) = (0, 0).$$

Wyjaśnijmy krótko, co oznacza to podobieństwo. Wiemy ze szkoły, że cztery podstawowe działania na liczbach rzeczywistych mają pewne własności. Dodawanie i mnożenie są łączne. Istnieją dla nich tak zwane elementy neutralne, dla dodawania 0, dla mnożenia 1, takie że  $a + 0 = 0 + a = a$  oraz  $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$  dla każdej liczby rzeczywistej  $a$ . Dla każdej liczby rzeczywistej  $a$  istnieje też element przeciwny  $-a$ , taki, że  $a + (-a) = 0$ , a dla każdej liczby  $a \neq 0$  element odwrotny  $\frac{1}{a}$  taki, że  $a \cdot \frac{1}{a} = 1$ .

Ponadto mnożenie jest rozdzielne względem dodawania. Czytelnik może sprawdzić, że wszystkie określone przez nas działania na parach liczbowych mają te własności.

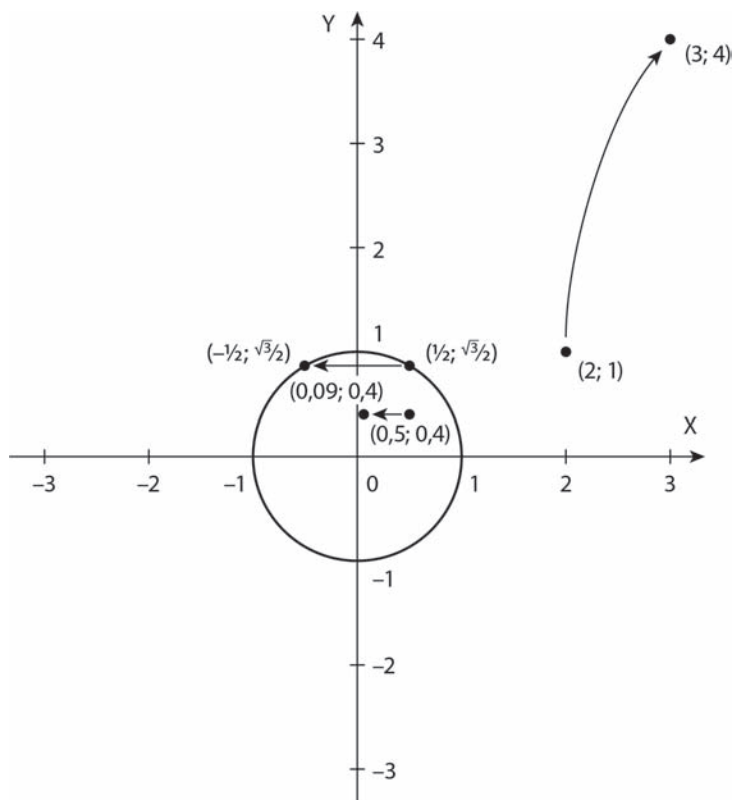
Możemy zatem stwierdzić, że daje się rachować na punktach płaszczyzny jak na liczbach, a wynikiem tych działań jest również punkt na płaszczyźnie, zawsze jeśli tylko nie będziemy dzielić przez  $(0, 0)$ . Możemy zatem również podnosić punkty do drugiej potęgi, jak w poniższych przykładach, i przyglądać się ruchowi, jaki wykonał punkt w wyniku tego działania (zob. rysunek 19.1).

$$(2, 1) \cdot (2, 1) = (2 \cdot 2 - 1 \cdot 1; 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2) = (3; 4)$$

$$(0,5; 0,4) \cdot (0,5; 0,4) = (0,5 \cdot 0,5 - 0,4 \cdot 0,4; 0,5 \cdot 0,4 + 0,4 \cdot 0,5) =$$

$$= (0,09; 0,4)$$

$$\left( \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \cdot \left( \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) = \left( -\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$



**Rysunek 19.1.** Jak zmieniły swoje położenie punkty podniesione do kwadratu

Zauważmy, że pierwszy punkt po podniesieniu do kwadratu zwiększył swoją odległość od początku układu, drugi zmniejszył, a trzeci zmienił położenie, ale odległość od początku układu nie zmieniła się. Można zadać pytanie, co by się działo, gdybyśmy wielokrotnie powtarzali podnoszenie do kwadratu, wykonując je znów na otrzymanym punkcie. Zauważmy, że wszystkie punkty będące w większej niż 1 odległości od początku układu „uciekną” w wyniku takiego działania do nieskończoności. Funkcja wyraża zmiany, jakie zachodzą dla punktów z chwili na chwilę, kiedy dokonujemy kolejnych iteracji, czyli podstawiamy do funkcji wartość otrzymaną z poprzedniego obliczenia i dokonujemy obliczenia wartości jeszcze raz. Wybierając dowolny punkt płaszczyzny, możemy śledzić, co będzie się z nim działo w wyniku działania funkcji. Taką dwójkę  $(C, f)$ , gdzie  $C$  oznacza u nas zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, a  $f$  pewną funkcję określoną na tym zbiorze i mającą w nim swoje wartości, nazywamy *układem dynamicznym*. Po wybra-



niu dowolnego punktu  $z_0 \in C$ , czyli punktu należącego do płaszczyzny, i po dokonaniu na nim nieskończenie wielu iteracji z użyciem funkcji  $f(z_{n+1} = f(z_n))$  otrzymamy nieskończony ciąg punktów płaszczyzny, niekoniecznie różnych, który nazywamy trajektorią punktu  $z_0$  i który możemy symbolicznie zapisać tak:

$$z_0; \quad z_1 = f(z_0); \quad z_2 = f(f(z_0)); \quad z_3 = f(f(f(z_0))); \quad \dots$$

W przypadku funkcji  $f(z) = z^2$  zauważyliśmy trzy różne zachowania się punktów w wyniku nieskończonej iteracji funkcji: punkty wnętrza koła o promieniu 1 i środka w początku układu współrzędnych zbiegają do punktu  $(0; 0)$ , punkty znajdujące się poza kołem uciekają do nieskończoności, a punkty leżące na brzegu koła pozostają na nim. Okrąg jednostkowy jest właśnie zbiorem Julii dla funkcji  $f(z) = z^2$  i stanowi granicę rozdzielającą punkty zbiegające do początku układu od tych uciekających do nieskończoności. Można przypuszczać, że różne funkcje mają różne zbiory Julii i właśnie to dało twórcom wystawy, którą odwiedzili Jachu i Krzychu, możliwość tworzenia piękna przy użyciu komputera. Tu opiszemy sposób, w jaki możemy odróżnić od siebie punkty uciekające do nieskończoności (nazwijmy je „uciekierami”) od tych, które nie uciekają (nazwijmy je „więźniami”).

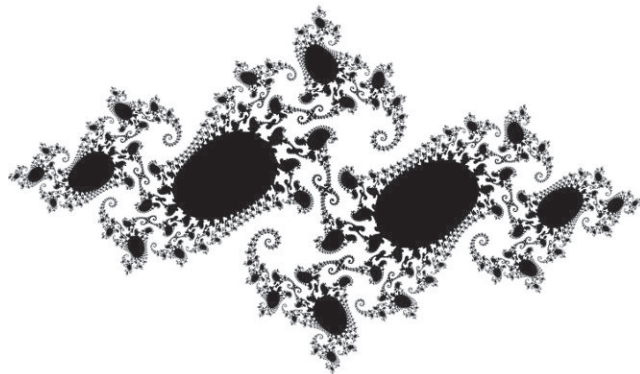
Zrobimy to na przykładzie funkcji nieco bardziej skomplikowanych od naszej funkcji kwadratowej użytej do wyjaśnienia pojęcia zbioru Julii, a mianowicie funkcji  $f(z) = z^2 + c$ , gdzie  $c \in C$  będzie pewnym ustalonym dla danej funkcji punktem płaszczyzny  $c = (x_c, y_c)$ . Biorąc dowolny punkt  $z = (x, y)$  i chcąc obliczyć  $f(z) = (x_f, y_f)$ , możemy posłużyć się wzorami:

$$x_f = x \cdot x - y \cdot y + x_c$$

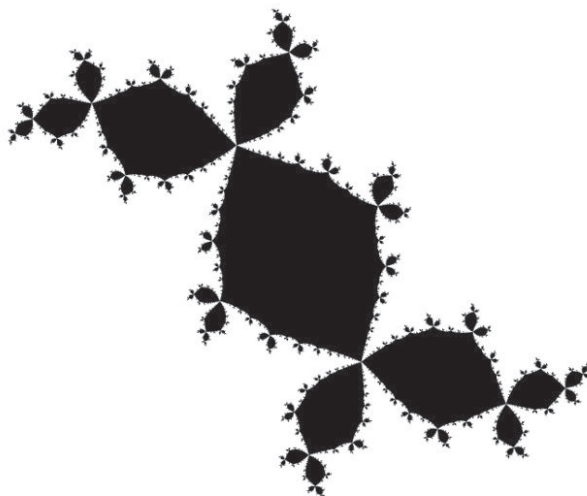
$$y_f = 2 \cdot x \cdot y + y_c$$

Obliczamy w ten sposób kolejne położenia punktu i jeśli ucieka on do nieskończoności, zaznaczamy punkt, od którego zaczęliśmy obliczenia, na biało na tworzonym obrazku, jeśli zaś nie ucieka, zaznaczamy go na czarno. W ten sposób powstaje wygenerowany komputerowo obraz. Ponieważ jednak trajektoria punktu ma nieskończenie wiele elementów, powstaje pytanie, jak stwierdzić, czy dany punkt ucieknie do nieskończoności, czy nie. Otóż stwierdzono, że jeśli w pewnym momencie wartość  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  przekroczy wartość  $R = \max(|c|, 2)$ , wtedy punkt ucieka do nieskończoności. Trzeba zatem wykonać pewną liczbę iteracji, aby się o tym przekonać. Im jest ona większa, tym większą mamy pewność, że punkt ucieka.

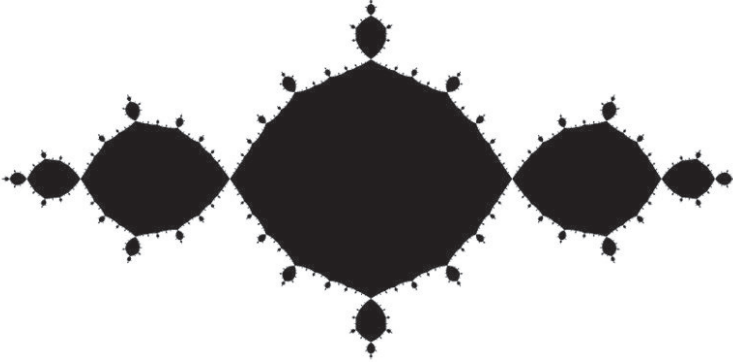
Na rysunkach 19.2, 19.3 i 19.4 Czytelnik znajdzie kilka wygenerowanych przez komputer obrazków. Pod nimi umieszczono informację, dla jakiej wartości  $c$  zostały wykonane obliczenia.



**Rysunek 19.2.** Zbiór więźniów dla  $c = (-0,745429; 0,113008)$

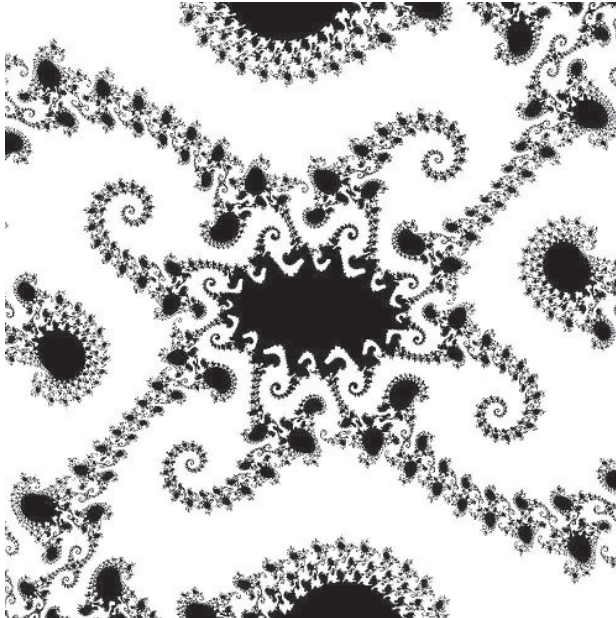


**Rysunek 19.3.** Zbiór więźniów dla  $c = (-0,12256117; 0,74486177)$



**Rysunek 19.4.** Zbiór więźniów dla  $c = (-1; 0)$

Jeśli zaś zechcemy przyjrzeć się z bliska wybranym fragmentom naszych rysunków, to też jest to możliwe i może przynieść nam wiele niespodziewanych doznań estetycznych. Spójrzcie tylko na rysunek 19.5.



**Rysunek 19.5.** Powiększony fragment rysunku 19.2



# Skorowidz

## A

abstrakcji, klasy, 92  
Adelman, 110  
algorytm spigot, 150  
  dla liczby  $e$ , 152, 153  
  dla liczby Eugeniusza, 161  
Archimedes, prawo, 57  
arytmetyka modulo, 109

## B

Barbier, E., 129, 131  
bazgroły, 83, 84, 85, 86  
cechy, 85  
geometryczne przekształcenie  
  ścieżki na permutację, 90  
liczbowe charakterystyki, 87  
podobieństwo, 91, 92, 95, 96, 98  
rozdzielanie, 91, 92, 93  
stosunek kolorów, 87  
symboliczny zapis, 88  
ścieżka, 88, 89  
zamiana ścieżki na permutację, 89  
zmiana na graf, 93, 94

## D

de Buffon, 128  
drugie prawo Newtona, 145

## 166

drzewo, wyznaczanie wysokości,  
  22, 23, 24  
dynamiczny, układ, 122

## E

$e$ , liczba, 137  
  algorytm spigot, 152, 153  
  cyfry rozwinięcia dziesiętnego,  
    154  
  jako suma szeregu, 151  
  program, 153, 154  
element neutralny, 121  
element przeciwny, 121  
estymacja statystyczna, 77  
Eugeniusza, liczba, 149, 158, 159,  
  160  
  1950 miejsc za przecinkiem, 162  
  algorytm spigot, 161  
  program, 161, 162

## F

Fisher, R.A., 78

## G

geometria bazgrołów, 83, 84, 85, 86  
  cechy, 85

geometryczne przekształcenie  
  ścieżki na permutację, 90  
liczbowe charakterystyki, 87  
podobieństwo, 91, 92, 95, 96, 98  
rozdzielanie, 91, 92, 93  
stosunek kolorów, 87  
symboliczny zapis, 88  
ścieżka, 88, 89  
zamiana ścieżki na permutację, 89  
zmiana bazgrołów na graf, 93, 94  
graf planarny, 93  
  spójność, 93  
  spójny bez krawędzi, 95  
  spójny o czterech krawędziach, 96  
  spójny o dwóch krawędziach, 96  
  spójny o jednej krawędzi, 95  
  spójny o trzech krawędziach, 96  
gry  
  Moc jedności, 102, 103, 104, 105  
  programowanie, 52  
  Szyki, 47, 48, 49, 50, 51, 53  
  w kości, 80, 81, 82  
Guilhaire, Benjamin, 53

## H

hipergeometryczny, rozkład, 76

**I**

igła, wyznaczenie liczby  $\pi$ , 128, 129, 130, 131, 132  
 iloczyn liczb naturalnych od 1 do  $n$ , 10  
 impreza  
 czas trwania, 16  
 obliczenie liczby gości, 14, 15, 16

**J**

jednostka tysięczna, 27  
 jezioro, oszacowanie liczby ryb, 77  
 Julia, 120  
 Julii, zbioru, 119, 123

**K**

kalendarz, wzór na dzień tygodnia, 36, 37  
 karciana łamigłówka, 69, 70, 71, 72, 74  
 program, 72, 73  
 kąty  
 jednostka miary, 27  
 system mierzenia, 27  
 kino, rozmieszczenie widzów, 31, 33  
 klasy abstrakcji, 92  
 klucz jawny, 110  
 tworzenie, 110, 111  
 klucz tajny, 110  
 tworzenie, 110, 111  
 Knuth, Donald, 150  
 kolejka, sposób ustawienia, 7, 8, 9, 10  
 komputer, generowanie obrazów, 120  
 koperta, rysowanie  
 otwarta, 41  
 zamknięta, 41  
 kratowe, punkty, 62, 63  
 kryptografia z kluczem publicznym, 110

**L**

Leclerc, Georges-Luis, 128  
 liczba  $e$ , 137  
 algorytm spigot, 152, 153  
 cyfry rozwinięcia dziesiętnego, 154  
 program, 153, 154

liczba Eugeniusza, 149, 158, 159, 160  
 1950 miejsc za przecinkiem, 162  
 algorytm spigot, 161  
 program, 161, 162  
 liczba  $\pi$ , wyznaczenie, 128, 129, 130, 131, 132  
 liczby pierwsze, 108  
 definicja, 108  
 w postaci  $6k+5$ , 31, 32  
 liczby wymierne, których kwadrat jest równy 7, 31, 32  
 loa3.5, program, 53  
 Lotto  
 kwoty przeznaczone na wygraną, 44  
 regulamin, 44  
 szansa trafienia szóstki, 11  
 wpływy, 45

**Ł**

łamigłówki  
 karty, 69, 70, 71, 72, 74  
 narysowanie figury bez odrywania ołówka, 41, 42

**M**

Mandelbrot, Benoit, 120  
 MIA III, program, 53  
 Moc jedności, gra, 102, 104  
 cel gry, 105  
 pionki, 103  
 plansza, 102  
 punkty mocy, 103  
 remis, 105  
 wersja dla trzech lub czterech osób, 105  
 zwycięskie układy pionów, 105  
 modulo, arytmetyka, 109

**N**

$n!$ , symbol, 10  
 największy wspólny dzielnik, 109, 110  
 neutralne, elementy, 121  
 Newtona, drugie prawo, 145  
 niedostępny przedmiot  
 wyznaczenie odległości, 26  
 wyznaczenie wysokości, 24, 25

NWD, *Patrz* największy wspólny dzielnik

**O**

objętość  
 półkuli, 58, 59  
 pudła, 115  
 zanurzonej części pilek, 58  
 obrazy, generowane przez komputer, 120  
 odległość  
 od niedostępnego przedmiotu o nieznanym wymiarach, 26  
 od przedmiotu o znanych wymiarach, 27  
 osoby, ustawienie w kolejce, 7, 8, 9, 10  
 otwarta koperta, rysowanie, 41

**P**

permutacje, przystawanie, 92  
 Picka, wzór, 62, 63  
 dowód, 64, 65, 66, 67  
 pieluchy, pranie, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 141, 142  
 koszt, 135  
 model matematyczny, 134  
 program, 140, 141  
 wynik dwukrotnego płukania, 135  
 wynik jednokrotnego płukania, 135  
 wynik trzykrotnego płukania, 136  
 pierwsze, liczby, 108  
 definicja, 108  
 w postaci  $6k+5$ , 31, 32  
 planarny, graf, 93  
 spójność, 93  
 spójny bez krawędzi, 95  
 spójny o czterech krawędziach, 96  
 spójny o dwóch krawędziach, 96  
 spójny o jednej krawędzi, 95  
 spójny o trzech krawędziach, 96  
 pole wielokątów, 62, 63  
 półkula, objętość, 58, 59  
 pranie pieluch, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 141, 142  
 koszt, 135  
 model matematyczny, 134  
 program, 140, 141  
 wynik dwukrotnego płukania, 135

wynik jednokrotnego płukania, 135  
wynik trzykrotnego płukania, 136  
prawo Archimidesa, 57  
programowanie gier, 52  
programy  
algorytm spigot dla liczby e, 153, 154  
algorytm spigot dla liczby Eugeniusza, 161, 162  
gra w Szyki, 53  
karciana lamigłówka, 72, 73  
pranie pieluch, 140, 141  
sposoby wydawania reszty, 11, 12  
przeciwny, element, 121  
przedmiot  
wyznaczanie odległości, 26, 27  
wyznaczanie wysokości, 24, 25  
przystawanie, 92  
pułdo, największa objętość, 114, 115, 116  
punkty kratowe, 62, 63

## R

relacja równoważności, 92  
reszta, sposoby wydania, 11  
program, 11, 12  
Rivest, 110  
rozkład hipergeometryczny, 76  
równanie różniczkowe, 146  
równoważności, relacja, 92  
różniczkowe, równanie, 146  
RSA, szyfr, 110  
odszyfrowanie, 111, 112  
szyfrowanie, 111  
tworzenie klucza jawnego, 110, 111  
tworzenie klucza tajnego, 110, 111  
wykorzystanie, 112  
ryby, oszacowanie liczby, 77  
rysowanie  
figury bez odrywania ołówka, 41, 42  
otwartej koperty, 41  
zamkniętej koperty, 41

## S

sala kinowa, rozmieszczenie widzów, 31, 33  
Sale, A.H.J., 150  
Shamir, 110  
spadochroniarz  
działające siły, 145  
prędkość spadania, 144, 145, 146, 147  
spigot, algorytm, 150  
dla liczby e, 152, 153  
dla liczby Eugeniusza, 161  
program, 153  
statystyczna, estymacja, 77  
symetryczne, szyfry, 110  
system mierzenia kątów, 27  
szachownica, ułożenie kostek domina, 31, 32, 33  
szóstka w Lotto, szansa trafienia, 11  
szyfrowanie  
klucz jawny, 110  
klucz tajny, 110  
RSA, 110, 111, 112  
szyfry symetryczne, 110  
szyfry asymetryczne, 110  
szyfry  
asymetryczne, 110  
RSA, 110, 111, 112  
symetryczne, 110  
Szyki, gra, 47, 48  
bicie, 50  
cel gry, 53  
niespójne układy pionków, 49  
programy, 53  
remis, 50, 51  
spójne układy pionków, 48, 49  
zasady poruszania się pionków, 49, 50

## T

Talesa, twierdzenie, 22  
Totalizator Sportowy

kwoty przeznaczone na wygraną, 44  
regulamin, 44  
szansa trafienia szóstki, 11  
wpływy, 45  
tratwa z piłek, 57, 59  
liczba potrzebnych piłek, 58, 60  
masa elementów, 58  
objętość zanurzonej części  
piłek, 58  
szkic, 57  
twierdzenie Talesa, 22  
tysięczne, jednostka, 27  
tysięcznych, wzór, 27, 28

## U

układ dynamiczny, 122

## W

widzowie, rozmieszczenie w kinie, 31, 33  
wielokąty, pole, 62, 63  
Winands, Mark, 53  
wymierne liczby, których kwadrat jest równy 7, 31, 32  
wysokość  
drzewa, 22, 23, 24  
nieodstępnego przedmiotu, 24, 25  
wzory  
na dzień tygodnia, 36, 37  
objętość półkuli, 59  
Picka, 62, 63, 64, 65, 66  
tysięcznych, 27, 28

## Z

zamknięta koperta, rysowanie, 41  
zbiory Julii, 119, 123  
zegar, kąt prosty tworzony przez wskazówki, 18, 19, 20





# PROGRAM PARTNERSKI

GRUPY WYDAWNICZEJ HELION



1. ZAREJESTRUJ SIĘ
2. PREZENTUJ KSIĄZKI
3. ZBIERAJ PROWIZJĘ

Zmień swoją stronę WWW  
w działający bankomat!

**Dowiedz się więcej i dołącz już dzisiaj!**

<http://program-partnerski.helion.pl>

GRUPA WYDAWNICZA

 **Helion SA**

# MATEMATYKA TO POTĘGA DO POTĘGI

Czy wiesz, że matematyka to nie czarna magia, tylko dowcip, inteligencja i odrobina tajemniczości w czystej formie? Tak, tak. To nie żadna ściema czy inna niewiada.

Zamiast włączać telewizor albo odpalać kolejną gierkę w sieci, otwórz tę książkę. Dzięki odkryciom matematyki przekonasz się, jak można odpowiedzieć na niezwykle frapujące pytania z codziennego życia — także Twojego.

- Ile liczb mieści się na końcu szpilki?
- Na czym polega geometria bazgrołów?
- Co język C++ ma wspólnego z ponętną Moniką?
- Ile kompotu można wypić, gdy pan Czesław ma kolonoskopię?
- I wreszcie wyższa szkoła jazdy: jak za pomocą algorytmu spigot odkodować PIN do lodówki?

Okazuje się, że nieznaną krainą faktów, teorii, hipotez, przełomowych eksperymentów i odkryć, dowodów, pojęć i idei matematycznych to nic innego jak nasze życie. A w życiu jak w matematyce — jeden błąd może popsuć wszystko. Lepiej więc wiedzieć więcej i spojrzeć w zagadkowe oczy matmy.

Nie taki X straszny, jak go malują...

**helion.pl**  
księgarnia  
internetowa

Nr katalogowy: 8 1 19



Księgarnia internetowa:  
<http://helion.pl>



Zamówienia telefoniczne:  
**0 801 339900**



**0 601 339900**



**Helion**

Sprawdź najnowsze promocje:

- <http://helion.pl/promocje>
  - <http://helion.pl/bestsellery>
- Zamów informacje o nowościach:  
• <http://helion.pl/newosci>

Helion SA  
ul. Kościuszki 1c, 44-100 Gliwice  
tel.: 32 230 98 63  
e-mail: [helion@helion.pl](mailto:helion@helion.pl)  
<http://helion.pl>

sięgnij po **WIĘCEJ**



KOD KORZYŚCI

ISBN 978-83-246-4770-5



9 788324 647705

Cena: 27,90 zł

Informatyka w najlepszym wydaniu