„Cała analiza nieskończonych obraca się dookoła wielkości zmiennych i ich funkcji”

L. Euler

Część IV. RACHUNEK RÓŻNICZKOWY I CAŁKOWY

Rozdział 1

Przestrzenie metryczne

1.1. Przestrzenie metryczne

Definicja 1.1.

1° Niech X będzie niepustym zbiorem o elementach $x, y, z, \ldots$. Odwzorowanie:

$$\varrho: \quad X \times X \ni (x, y) \to \varrho(x, y) \in \mathbb{R}_+ \tag{1.1}$$

spełniające warunki:

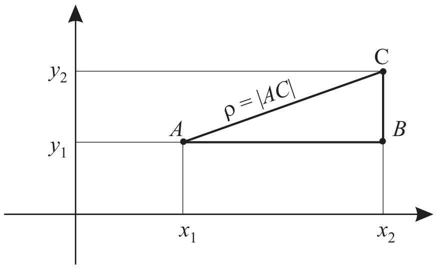
M1. $\forall x, y \in X \quad \varrho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
M2. $\forall x, y \in X \quad \varrho(x, y) = \varrho(y, x)$ — własność symetrii
M3. $\forall x, y, z \in X \quad \varrho(x, y) \leqslant \varrho(x, z) + \varrho(z, y)$ — nierówność trójkąta

nazywamy metryką (odległością) w zbiorze X.

2° Parę (X, ϱ) nazywamy przestrzenią metryczną (krótko przestrzeń metryczną będziemy oznaczać p.m.).

Przykład 1.1.

a) Zbiór liczb rzeczywistych $X = \mathbb{R}$ z metryką $\varrho(x, y) = |x - y|$ jest p.m. z metryką naturalną.
b) Zbiór liczb zespolonych $X = \mathbb{C}$ z metryką $\varrho(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$ jest p.m.
c) Zbiór $\mathbb{R}^2$ punktów $x = (x_1, x_2)$; $y = (y_1, y_2)$ z metryką
1° $\varrho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ jest p.m. (patrz rys. 1.1)
2° Zbiór $\mathbb{R}^2$ punktów $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ z metryką $\varrho_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ — jest p.m..
3° Zbiór $\mathbb{R}^2$ punktów $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ z metryką $\varrho_2(x, y) = \max_{i=1,2} |x_i - y_i|$ jest p.m.



Rys. 1.1

Przykład 1.2.
W przestrzeni $\mathbb{R}^n$ najczęściej wprowadza się metryki następujące: dla punktów $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ mamy

1° $$\varrho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2} \tag{1.2}$$

2° $$\varrho_1(x, y) = |x_1 - y_1| + \ldots + |x_n - y_n| \tag{1.3}$$

3° $$\varrho_2(x, y) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \{|x_i - y_i|\} \tag{1.4}$$

Uwaga 1.1. Przykład metryki $\varrho(x, y)$ określony w 1° odgrywa podstawową rolę. Parę $(\mathbb{R}^n, \varrho)$ będziemy dalej nazywać n-wymiarową przestrzenią kartezjańską i oznaczać jako $\mathbb{R}^n$. Wykażemy, że metryka $\varrho(x, y)$ dana wzorem 1° spełnia aksjomaty metryki. Dla przykładu wykażemy warunek M3. Skorzystamy tutaj z nierówności Schwartza postaci:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \tag{1.5}$$

Mamy:

$$\begin{aligned}
&\varrho^2(x, y) = (x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2 = \\
&= (x_1 - z_1 + z_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - z_n + z_n - y_n)^2 \\
&= (x_1 - z_1)^2 + \ldots (x_n - z_n)^2 + 2(x_1 - z_1)(z_1 - y_1) + \ldots \\
&+2(x_n - z_n)(z_n - y_n) + (z_1 - y_1)^2 + \ldots + (z_n - y_n)^2 \leqslant \\
&\leqslant (x_1 - z_1)^2 + \ldots + (x_n - z_n)^2 + \\
&+2\sqrt{(x_1 - z_1)^2 + \ldots + (x_n - z_n)^2}\sqrt{(z_1 - y_1)^2 + \ldots (z_n - y_n)^2} + \\
&(z_1 - y_1)^2 + \ldots + (z_n - y_n)^2 = (\varrho(x, z) + \varrho(z, y))^2
\end{aligned}$$

Zatem

$$\varrho(x, y) \leqslant \varrho(x, z) + \varrho(z, y)$$

c.n.d.

Przykład 1.3. (Przestrzeń dyskretna)
Para (X, ϱ) gdzie X jest dowolnym zbiorem $\neq \varnothing$ oraz

$$\varrho : \ X \times X \ni (x, y) \to \varrho(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x = y \\ 1 & \text{dla } x \neq y \end{cases} \tag{1.6}$$

jest przestrzenią metryczną

Sprawdzamy, że ϱ zdefiniowane powyżej spełnia aksjomaty metryki
M1 $\varrho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ wynika z definicji
M2 $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$ wynika z definicji.
M3 $\varrho(x, y) \leqslant \varrho(x, z) + \varrho(z, y)$.
Gdy $x \neq y$, to mamy $z \neq y \vee z \neq x$ zatem $\varrho(x, y) = 1 \leqslant \varrho(x, z) + \varrho(y, z)$
Gdy $x = y$, to mamy $0 \leqslant 0 + 1$
Parę (X, ϱ) nazywamy przestrzenią dyskretną.

Przykład 1.4.
Para $(\mathbb{R}, \varrho)$ gdzie ϱ jest określona następująco

$$\varrho : \ \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (x, y) \to \varrho(x, y) = |x + y| \in \mathbb{R}$$

nie jest przestrzenią metryczną.

Dowód.
1° $|x + y| = 0 \Rightarrow x = -y$ zatem dla $x \neq y$ mamy $|x + y| = 0$
2° $|x + y| = |y + x|$ jest spełniona
3° $|x + y| \geqslant |x + z| + |y + z|$ np. dla $x = 5$ $y = 10$ $z = -9$.
Zatem warunki M1 i M3 nie są spełnione.
Przestrzeń $(\mathbb{R}, \varrho)$ z funkcją $\varrho(x, y) = |x + y|$ nie jest przestrzenią metryczną.

Definicja 1.2. Niech będzie dana p.m. $(\mathbb{X}, \varrho)$. Wówczas
1° Kulą otwartą o środku w punkcie x_0 i promieniu r nazywamy zbiór

$$B(x_0, r) = \{x \in X : \ \ \varrho(x, x_0) < r\} \tag{1.7}$$

2° Kulą domkniętą o środku w punkcie x_0 i promieniu r nazywamy zbiór

$$\bar{B}(x_0, r) = \{x \in X : \ \ \varrho(x, x_0) \leqslant r\} \tag{1.8}$$

3° Epsilonowym otoczeniem punktu x_0 nazywamy kulę $B(x_0, \varepsilon)$

Definicja 1.3. Punkt $x \in U \subset \mathbb{X}$ nazywamy punktem wewnętrznym zbioru U, jeśli $\exists r > 0$, takie że $B(x, r) \subset U$.

Zbiór wszystkich punktów wewnętrznych zbioru U nazywamy wnętrzem zbioru U i oznaczamy symbolem Int$U$.

Definicja 1.4. Punkt $x \in X$ nazywamy punktem brzegowym zbioru $U \subset X$ jeśli dla $\forall r > 0$ $B(x,r) \cap U \neq \varnothing \neq B(x,r) \cap (X \setminus U)$.

Zbiór wszystkich punktów brzegowych zbioru U nazywamy brzegiem zbioru U i oznaczamy symbolem ∂U.

Definicja 1.5. Punkt $x \in X$ nazywamy punktem skupienia zbioru $U \subset X$, jeśli dla $\forall r > 0$, $(B(x,r) \setminus \{x\}) \cap U \neq \varnothing$

Zbiór wszystkich punktów skupienia zbioru U oznaczamy symbolem U^d. Jeżeli $x \in U \setminus U^d$, to x nazywamy punktem izolowanym zbioru U.

Definicja 1.6. Zbiór $U \subset X$ nazywamy zbiorem otwartym, jeżeli każdy punkt $x \in U$ jest punktem wewnętrznym zbioru U.

Twierdzenie 1.1. *Jeżeli $U \subset X$, to*

1° $\mathrm{Int}U$ *jest zbiorem otwartym*

2° U *jest zbiorem otwartym wtedy i tylko wtedy, gdy* $\mathrm{Int}U = U$.

Definicja 1.7. Zbiór $U \subset X$ nazywamy zbiorem domkniętym, jeżeli $X \setminus U$ jest zbiorem otwartym.

Definicja 1.8. Domknięciem zbioru $U \subset X$ nazywamy zbiór $U \cup U^d$ co oznaczamy jako $\bar{U}$.

Twierdzenie 1.2. *Jeżeli $U \subset X$ to*

1° *Zbiór $\bar{U}$ jest zbiorem domkniętym*

2° *Zbiór U jest domkniętym wtedy i tylko wtedy gdy $\bar{U} = U$.*

Przykład 1.5.
Każdy przedział (a,b) jest zbiorem otwartym w $\mathbb{R}$, natomiast nie jest otwartym w $\mathbb{R}^2$

Przykład 1.6.
W p.m. dla metryk z przkładu 1.1

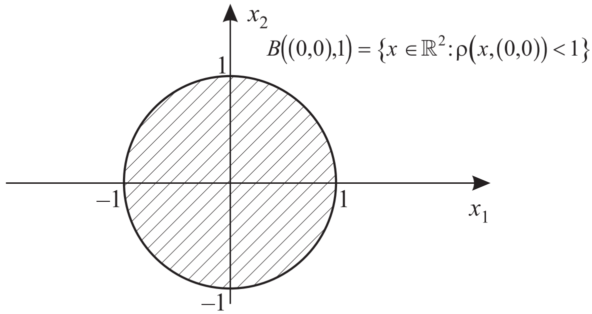
a) $(\mathbb{R}^2, \varrho)$

b) $(\mathbb{R}^2, \varrho_1)$,

c) $(\mathbb{R}^2, \varrho_2)$, narysować kulę o środku w punkcie $(1,2)$ i promieniu 1.

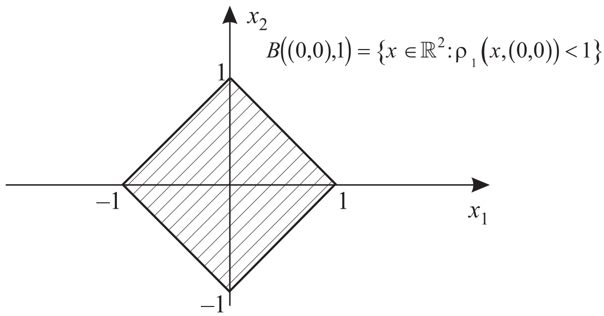
Rozwiązanie:

a)



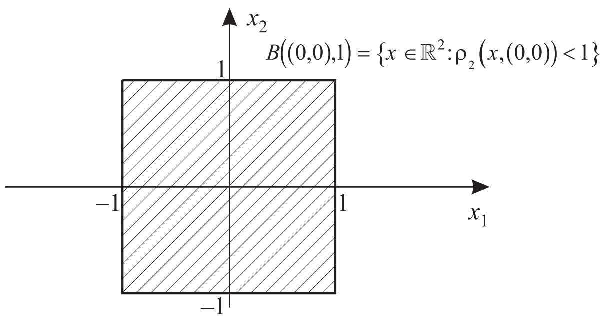
Rys. 1.2a

b)



Rys. 1.2b

c)



Rys. 1.2c

Przykład 1.7.
W przestrzeni $(\mathbb{R}^1, \varrho)$ rozważmy zbiór $\mathbb{A}$ postaci:

$$\mathbb{A} = \left\{ \frac{1}{n} : \; n \in \mathbb{N} \right\}$$

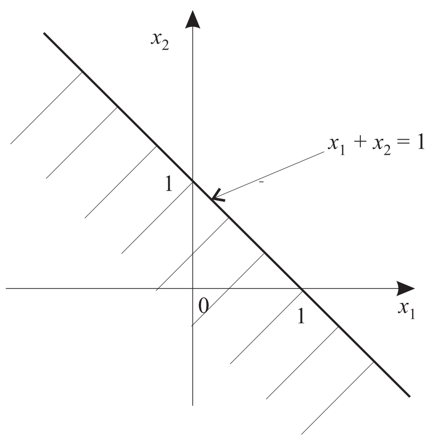
1° Zbiór $\mathbb{A}$ nie jest otwarty, gdyż Int$\mathbb{A} = \varnothing$.
2° Brzegiem zbioru $\mathbb{A}$ jest zbiór postaci $\partial A = A \cup \{0\}$.
3° Zbiór punktów skupienia zbioru $\mathbb{A}$ ma postać $A^d = \{0\}$.
4° Domknięcie zbioru $\mathbb{A}$ ma postać $\bar{\mathbb{A}} = A \cup \{0\}$.
5° Zbiór $\mathbb{A}$ nie jest domknięty.
6° $\mathbb{A} \setminus \mathbb{A}^d = \mathbb{A}$ — czyli wszystkie punkty zbioru A są izolowane.

Przykład 1.8.
W przestrzeni $(\mathbb{R}, \varrho)$ rozważmy zbiór Q — zbiór liczb wymiernych
1° Mamy $\bar{Q} = \mathbb{R}$
2° Int$Q = \varnothing$
3° $\partial Q = \mathbb{R}$
4° $Q - Q^d = Q - \mathbb{R} = \varnothing$

Przykład 1.9.
W przestrzeni $(\mathbb{R}^2, \varrho)$ rozważamy zbiór $\mathbb{A}$ postaci

$$\mathbb{A} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \; x_1 + x_2 \leqslant 1\}$$

(patrz rys. 1.3)



Rys. 1.3

Mamy
1° $A^d = A$
2° $\bar{A} = A \cup A^d = A$ — czyli zbiór A jest domknięty
3° Int$A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \; x_1 + x_2 < 1\}$
4° $\partial A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \; x_1 + x_2 = 1\}$

Przykład 1.10.
W przestrzeni $(\mathbb{R}^2, \varrho)$ rozważmy zbiór

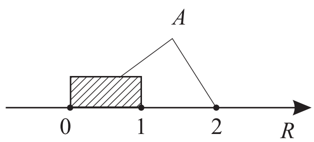
$$\mathbb{A} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \; x_1 = t, \; x_2 = t + 1, \; t \in (0, 1)\}$$

Mamy
1° $A^d = A \cup \{(0, 1), (1, 2)\}$
2° $\bar{A} = A^d$
3° $\mathrm{Int} A = \varnothing$
4° $\partial A = \bar{A}$

Wniosek 1.1. Zbiór A nie jest ani otwarty ani domknięty.

Przykład 1.11.
Znaleźć punkt skupienia zbioru $A = [0, 1) \cup [2] \subset \mathbb{R}$.

Rozwiązanie:
Z rysunku (patrz rys. 1.4) wynika, że $A^d = [0, 1]$



Rys. 1.4

Odpowiedź.
$A^d = [0, 1]$

Wniosek 1.2. Zbiór A nie jest ani otwarty ani domknięty.

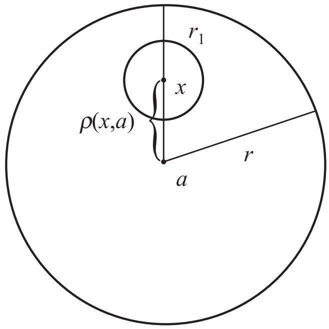
Definicja 1.9. Otoczeniem punktu $a \in X$ nazywamy dowolny zbiór otwarty $U \subset X$, taki że a jest punktem wewnętrznym w zbiorze U.
Prawdziwe jest następujące twierdzenie

Twierdzenie 1.3. *Dla* $\forall r > 0$ *i* $\forall a \in X$
1° *kula* $B(a, r)$ *jest zbiorem otwartym*
2° *kula domknięta* $\bar{B}(a, r)$ *jest zbiorem domkniętym*

Dowód.
1° Dla $\forall x \in B(a, r)$ istnieje r_1 postaci

$$r_1 = \frac{r - \varrho(x, a)}{2},$$

taki że $B(x, r_1) \subset B(a, r)$. Wobec tego $x \in X$ jest punktem wewnętrznym zbioru X (patrz rys. 1.6)



Rys. 1.5

2° Dowód pomijamy

Można wykazać prawdziwość następującego twierdzenia.

Twierdzenie 1.4. *Jeżeli* (X, ϱ) *jest przestrzenią metryczną* $\tau = \{U \subset X : \text{Int}U = U\}$ *oraz* $I \subset \mathbb{R}$ *oznacza zbiór indeksów, to wówczas prawdziwe są następujące warunki*

1° $\varnothing \in \tau$

2° $X \in \tau$

3° Jeżeli $U_\alpha \in \tau$, $\alpha \in I$, to $\bigcup_{\alpha \in \mathbb{Z}} U_\alpha \in \tau$

4° Jeśli $U_\alpha \in \tau$, $\alpha \in A \subset I$, gdzie A jest skończone to $\bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha \in \tau$.

Dowód.

1° $\text{Int}\varnothing = \varnothing$, a więc $\varnothing \in \tau$

2° Dla każdego $x \in X$ oraz dla każdego $r > 0$ kula $B(x, r) \subset X$.

3° Niech $x \in \bigcup_{\alpha \in \text{I}} U_\alpha$, wtedy $\exists \alpha_0 \in I$, że $x \in U_{\alpha_0}$.
Ponieważ U_{α_0} jest zbiorem otwartym zatem $\exists r > 0$, takie że $B(x, r) \subset U_{\alpha_0} \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$.

4° Dowód pomijamy

Możemy teraz sformułować następującą definicję.

Definicja 1.10. (Przestrzeni topologicznej)
Parę (X, τ) złożoną ze zbioru $X \neq \varnothing$ oraz rodziny podzbiorów τ zbioru X spełniającą warunki 1, 2, 3 twierdzenia 1.4 nazywamy **przestrzenią topologiczną**, rodzinę τ toplogią, zaś elementy rodziny τ zbiorami otwartymi.

1.2. Ciągi w przestrzeni metrycznej

Definicja 1.11. Odwzorowanie postaci

$$\mathbb{N} \ni n \to x_n \in X \tag{1.9}$$

nazywamy ciągiem i oznaczamy symbolem $\{x_n\}$ $((x_n))$.

Definicja 1.12. Niech (X, ϱ) będzie przestrzenią metryczną.
Mówimy, że ciąg $\{x_n\} \subset X$ jest zbieżny do elementu $x_0 \in X$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, x_0) = 0$ co zapisujemy jako $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Uwaga 1.2. Z definicji 1.12 wynika, że $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 (\forall n > n_0 \Rightarrow \varrho(x_n, x_0) < \varepsilon) \tag{1.10}$$

Prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.5. *Ciąg zbieżny w przestrzeni metrycznej* (X, ϱ) *ma dokładnie jedną granicę.*

Dowód.
Niech $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ oraz $\lim_{n\to\infty} x_n = y_0$, wówczas mamy

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n > n_0\ \varrho(x_n, x_0) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{i} \quad \varrho(x_n, y_0) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

Zatem $\varrho(x_0, y_0) \leqslant \varrho(x_0, x_n) + \varrho(x_n, y_0) < \varepsilon$ dla $n > n_0$.
Ponieważ $\varepsilon > 0$ jest dowolnie małą liczbą zatem $x_0 = y_0$.

Definicja 1.13. Niech będzie dany ciąg $\{x_n\} \subset X$ oraz ściśle rosnący ciąg liczb naturalnych (patrz def. 1.24 str. 215) $\mathbb{N} \ni k \to n_k \in \mathbb{N}$.
Wówczas ciąg $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\} \subset X$ nazywamy podciągiem ciągu $\{x_n\}$. Prawdziwe są następujące twierdzenia.

Twierdzenie 1.6. *Jeżeli* $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, *to dla każdego podciągu* $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$.

Dowód. Pomijamy.

Twierdzenie 1.7. *Jeżeli dla* $\forall \{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$, *to* $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Dowód. Pomijamy.

Twierdzenie 1.8. *Jeżeli* $a \in U^d$, *to* $\exists \{x_n\} \subset U$, *że* $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

Dowód.
Niech $a \in U^d$. Wtedy dla $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists x_n \in B\left(a, \frac{1}{n}\right) \cap U \setminus \{a\}$ zatem $\exists \{x_n\} \subset U$, taki że $\forall n \in \mathbb{N}$ $\varrho(x_n, a) \leqslant \frac{1}{n}$ czyli $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Definicja 1.14. Zbiór $U \subset X$ nazywamy zwartym, jeśli dla $\forall \{x_n\} \subset U$ $\exists \{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$, taki że $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} \in U$.

Definicja 1.15. Zbiór $U \subset X$ jest ograniczony, jeśli $\exists x_0 \in X$ oraz liczba $r > 0$, taka że $U \subset B(x_0, r)$.

Twierdzenie 1.9. *Jeżeli zbiór* $U \subset X$ *jest zwarty, to zbiór* U *jest ograniczony i domknięty.*

Dowód.
Wykażemy domkniętość: z twierdzenia 1.2 wynika, że zbiór U jest domknięty, gdy $U = \bar{U} = U \cup U^d$. Załóżmy, że zbiór U nie jest domknięty. Wówczas istnieje $a \in U^d \setminus U$. Na podstawie twierdzenia 1.8 istnieje ciąg $\{x_n\} \subset U$, taki że $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, natomiast na podstawie twierdzenia 1.6 mamy, że dla każdego ciągu $\{x_{n_k}\}$ $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a$. Zatem z ciągu $\{x_n\} \subset U$ nie można wybrać podciągu zbieżnego w U. Prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.10. *Jeżeli zbiór* $U \subset \mathbb{R}^n$ *jest ograniczony i domknięty, to zbiór* U *jest zwarty.*

Dowód. Pomijamy.

Definicja 1.16. Zbiór $U \subset X$ nazywamy spójnym, gdy nie istnieją dwa otwarte zbiory $A, B \subset X$, takie że

1° $A \cap B = \varnothing$

2° $A \cap U \neq \varnothing$ i $B \cap U \neq \varnothing$

3° $U \subset A \cup B$

Prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.11. *Zbiór* $U \subset \mathbb{R}$ *jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy dla* $\forall x, y \in U$, *takich że* $x < y$; *jeśli* $x < z < y$, *to* $z \in U$.

Dowód. Pomijamy

Definicja 1.17. Niech $\{x_n\} \subset X$. Mówimy, że ciąg $\{x_n\}$ spełnia warunek Cauchy'ego, gdy dla

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall m, n > n_0 \Rightarrow \varrho(x_m, x_n) < \varepsilon \tag{1.11}$$

Ciąg spełniający warunek Cauchy'ego nazywamy ciągiem Cauchy'ego.

Twierdzenie 1.12. *Jeżeli ciąg $\{x_n\}$ jest ciągiem zbieżnym, to ciąg $\{x_n\}$ jest ciągiem Cauchy'ego.*

Dowód.
Niech $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \in X$. Wówczas $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall m, n > n_0$ mamy $\varrho(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$ oraz $\varrho(x_m, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$. Stąd

$$\varrho(x_m, x_n) \leqslant \varrho(x_m, x_0) + \varrho(x_n, x_0) \leqslant \varepsilon$$

Uwaga 1.3. Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe, tzn. nie dla każdej przestrzeni metrycznej X warunek Cauchy'ego jest wystarczający dla istnienia granicy ciągu o wartościach w X.

Przyjmując np. $\mathbb{X} = (0, \infty)$ $\varrho(x, y) = |x - y|$ dla $x, y \in \mathbb{X}$ oraz $x_n = \frac{1}{n}$ dla $n \in \mathbb{N}$ jest ciągiem Cauchy'ego, ale nie istnieje takie $a \in \mathbb{X}$, że $a = \lim_{n\to\infty} x_n$ (bo $\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \notin X$).

Definicja 1.18. (Przestrzeni metrycznej zupełnej) Przestrzeń metryczną (X, ϱ) nazywamy zupełną, gdy każdy ciąg $(x_n) \subset X$ spełniający warunek Cauchy'ego jest zbieżny do elementu $x \in X$

Twierdzenie 1.13. *Jeżeli A jest podzbiorem domkniętym w przestrzeni metrycznej zupełnej (p.m.z) (Y, ϱ), to przestrzeń metryczna $(A, \varrho|_{A\times A})$ jest zupełna.*

Przykład 1.12.
Przestrzeń $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ jest przestrzenią metryczną zupełną

Definicja 1.19. (Odwzorowania zwężającego) Odwzorowanie f p.m. X na siebie nazywamy **zwężającym**, gdy

$$\exists \alpha \in (0, 1), \quad \forall x_1, x_2 \in X \quad \rho(f(x_1), f(x_2)) \leq \alpha\rho(x_1, x_2) \tag{1.12}$$

Twierdzenie 1.14. *(Zasada odwzorowań zwężających — twierdzenie o punkcie stałym S. Banacha) Jeżeli (X, ϱ) jest przestrzenią metryczną zupełną, to każde odwzorowanie zwężające:*

$$f : X \to X \tag{1.13}$$

ma dokładnie jeden punkt stały tzn. $\exists! x \in X$, że $f(x) = x$, który wyznaczamy za pomocą metody kolejnych przybliżeń

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n) \\ x &= \lim_{n\to\infty} x_n \end{aligned} \tag{1.14}$$

Dowód.

1° **Jednoznaczność.** Załóżmy, że $x = f(x)$, $x' = f(x')$. Mamy wówczas:

$$\varrho(x, x') = \varrho(f(x), f(x') \leqslant \alpha\varrho(x, x')$$

Zatem:

$$\varrho(x, x') \leqslant \alpha\varrho(x, x')$$

Gdyby $x \neq x'$, to byłoby

$$\varrho(x, x') > 0$$

Wówczas dla $\alpha \in (0, 1)$ nierówność (1.1) jest sprzeczna, co przeczy założeniu.

2° **Istnienie.** Definiujemy ciąg o wyrazach w X następująco: wyraz $x_1 \in X$ ustalamy dowolnie, zaś $x_{m+1} = f(x_m)$ dla $n \in \mathbb{N}$. O ile wykażemy, że ciąg (x_n) jest zbieżny w X to dowód będzie zaliczony.
Istotnie, oznaczając granicę tego ciągu przez x, mamy:

$$x = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$$

gdyż na mocy definicji 1.17 funkcja f jest ciągła.
Ponieważ przestrzeń X jest z założenia zupełna, więc dla dowodu zbieżności ciągu (x_n) wystarczy stwierdzić, że spełnia on warunek Cauchy'ego. Mamy

$$\begin{aligned}
&\varrho(x_3, x_2) = \varrho(f(x_2), f(x_1)) \leqslant \alpha\varrho(x_2, x_1)\\
&\varrho(x_4, x_3) = \varrho(f(x_3), f(x_2)) \leqslant \alpha\varrho(x_3, x_2) \leqslant \alpha^2\rho(x_2, x_1)\\
&\qquad\vdots
\end{aligned}$$

Widać więc, że indukcyjnie można udowodnić zbieżność

$$\varrho(x_{n+1}, x_n) \leqslant \alpha^{n-1}\varrho(x_2, x_1) \qquad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}$$

Na mocy nierówności trójkąta mamy dla $m > n$, $m, n \in \mathbb{N}$ Ponieważ

$$\begin{aligned}
\varrho(x_m, x_n) &\leqslant \sum_{k=n}^{m-1} \varrho(x_k, x_{k+1}) \leqslant \sum_{k=n}^{m-1} \alpha^{k-1}\varrho(x_2, x_1) \leqslant \varrho(x_2, x_1) \sum_{k=n}^{m-1} \alpha^{k-1} =\\
&= \varrho(x_2, x_1)\frac{1 - \alpha^{m-n}}{1 - \alpha}
\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} \alpha^n = 0 \quad \text{zatem dla} \ \ \forall\varepsilon > 0 \ \exists \ k \in N$$

takie, że

$$\varrho(x_2, x_1)(1 - \alpha)^{-1}\alpha^{n-1} < \varepsilon \qquad \text{dla} \quad n > k$$

a zatem

$$\varrho(x_n, x_m) < \varepsilon \qquad \text{dla} \quad n, m > k$$

c.n.d.

Ciąg (x_n) występujący w drugiej części dowodu nosi nazwę **ciągu kolejnych przybliżeń** rozwiązania równania $x = f(x)$, a metoda tego rozwiązanie w postaci granicy tak zdefiniowanego ciągu (x_n) nazywa się **metodą kolejnych przybliżeń**.

Uwaga 1.4. Twierdzenie 1.14 stosowane jest do dowodu istnienia i jednoznaczności rozwiązania równań: algebraicznych, różniczkowych i całkowych itp. Pokażemy to na przykładach.

Przykład 1.13.
Stosując twierdzenie Banacha, wykaż że poniższe równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie:

$$x^n - (n+1)(1-x) = 0 \;:\; 0 < x < 1 \;\wedge\; n \in \mathbb{N} \tag{1.15}$$

Rozwiązanie:
Określamy odwzorowanie f. Korzystając z równania mamy

$$x = 1 - \frac{x^n}{n+1} \tag{1.16}$$

Zatem

$$f(x) = 1 - \frac{x^n}{n+1} \tag{1.17}$$

Mamy wykazać, że równanie $x = f(x)$, gdzie f dana jest wzorem (1.17) ma dokładnie jeden punkt stały. Weźmy $a < x_1 \leqslant x_2 < 1$ i rozważmy $|f(x_1) - f(x_2)|$. Mamy

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \frac{1}{n+1}|x_1^n - x_2^n| =$$
$$\frac{1}{n+1}|x_1 - x_2| \cdot |x_1^{n-1} + x_1^{n-2} \cdot x_2 + \cdots + x_2^{n-1}| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{n+1}|x_1 - x_2| \cdot n = \frac{n}{n+1}|x_1 - x_2|$$

czyli mamy

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant \frac{n}{n+1}|x_1 - x_2| \tag{1.18}$$

zatem $\alpha = \frac{n}{n+1} < 1$, a więc na mocy twierdzenia Banacha 1.14 odwzorowanie określone wzorem (1.17) jest zwężające czyli $\exists\ x!$ takie, że $x = f(x)$, gdzie $f(x)$ dane jest wzorem (1.17).

Przykład 1.14.
Wykażemy, że układ liniowy równań algebraicznych

$$x_i = \sum_{j=1}^{a} a_{ij}x_j + b_i \qquad \text{dla} \quad i = 1, 2, \ldots, k \tag{1.19}$$

ma przy dowolnych b_i dokładnie jedno rozwiązanie, o ile tylko wyrazy macierzy $\mathbb{A} = (a_{ij})_{k\times k}$ są co do modułu dostatecznie małe. Układ ten możemy zapisać w postaci równania

$$x = f(x)$$

gdzie $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ oznacza funkcję, która każdemy punktowi $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ przyporządkowuje punkt $y = (y_1, \ldots, y_k) \in \mathbb{R}^k$, którego współrzędne wyrażają się wzorem

$$y_i = \sum_{j=1}^{k} a_{ij}x_j + b_i, \qquad i = 1, \ldots, k$$

oznaczając $M = \max\{|a_{ij}|\ i, j = 1, \ldots, k\}$ $y = f(x)$, $y' = f(x')$ mamy

$$|y_i - y_i'| \leqslant \sum_{j=1}^{k} |a_{ij}|(x_j - x_j') \leqslant M \sum_{j=1}^{k} |x_j - x_j'|$$

zatem na mocy nierówności Schwartza (patrz (1.5)) mamy

$$|y_i - y_i'| \leqslant M\sqrt{k}\|x - x'\|$$

Stąd

$$\|y - y'\| = \left(\sum_{i=1}^{k}(y_i - y_i')^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant Mk\|x - x'\|$$

zatem jeśli $\alpha = kM < 1$ to na mocy twierdzenia 1.14 (zastosowanego do przestrzeni $X = \mathbb{R}^k$) rozważany układ równań liniowych ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Definicja 1.20.

1° Przestrzeń metryczną (X, ϱ) nazywamy zwartą (sekwencyjnie, ciągowo), gdy

$$\forall (x_n) \subset X\ \exists (x_{n_k}) \subset (x_n) : \lim x_{n_k} = x \in X$$

(tzn. gdy z każdego ciągu można wybrać podciąg zbieżny)

2° Zbiór $A \subset X$ nazywamy zwartym, gdy jako przestrzeń metryczna z metryką indukowaną z X jest przestrzenią zwartą.

Przykład 1.15.
Odcinek $[0, 1]$ jest zbiorem zwartym.

Twierdzenie 1.15.

1° *Każda przestrzeń zwarta jest przestrzenią zupełną*

2° *Zbiór* $A \subset \mathbb{R}^n$ *jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest domknięty i ograniczony.*

Twierdzenie 1.16. (**Twierdzenie Weierstrassa**) *Funkcja rzeczywista ciągła w (ciągowo) zwartej przestrzeni metrycznej jest ograniczona i osiąga swoje kresy.*

Przykład 1.16.
W przestrzeni $(X, |\cdot|)$ gdzie $X = \mathbb{W}$ zbiór liczb niewymiernych nie jest zwarty.

Dowód.
Weźmy ciąg $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Ciąg ten nie zawiera w sobie żadnego podciągu zbieżnego.

Przykład 1.17.
Skończony odcinek $[a, b]$ osi liczbowej jest zbiorem zwartym

Dowód.
Niech (x_n) będzie dowolnym nieskończonym ciągiem liczbowym takim, że $a \leqslant x_n \leqslant b$. Podzielmy odcinek $[a, b]$ na połowy. Co najmniej jedna z nich zawiera nieskończoną ilość elementów ciągu (x_n). Wybieramy z niej dowolny element x_{n_1} ciągu (x_n) i podzielimy ją ponownie na połowy. Z tej połowy, która ma nieskończoną ilość elementów, wybieramy następny element x_{n_2} ciągu (x_n) itd. W ten sposób wszystkie wyrazy podciągu (x_{n_k}) począwszy od numeru k leżą w przedziale o długości $(b-a)/2^k$ Podciąg ten spełnia warunek Cauchy'ego i wobec domkniętości odcinka $[a, b]$ ma w nim granicę. Dowodzi to zwartości odcinka $[a, b]$.

1.3. Ciągi liczbowe

Definicja 1.21. Odwzorowanie postaci

$$\mathbb{N} \ni n \to a_n \in \mathbb{R} \tag{1.20}$$

nazywamy ciągiem liczbowym i oznaczamy symbolem $\{a_n\}$ lub (a_n).

Definicja 1.22. (Granica ciągu liczbowego) Mówimy, że ciąg $\{a_n\}$ ma granicę g co zapisujemy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) \ \forall n > \delta \Rightarrow |a_n - g| < \varepsilon \tag{1.21}$$

Przykład 1.18.
Udowodnić na podstawie definicji, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \tag{1.22}$$

Dowód.
Występująca w definicji granicy nierówność $|a_n - g| < \varepsilon$ przybiera w tym przypadku postać:

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon \tag{1.23}$$

Należy wykazać, że dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje liczba δ, taka że dla $n > \delta$. zachodzi nierówność $|a_n - g| < \varepsilon$. Mamy:

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n+1}\right| = \left|\frac{-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} \tag{1.24}$$

zatem:

$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon \tag{1.25}$$

Rozwiązując ostatnią nierówność względem n otrzymujemy:

$$n > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \tag{1.26}$$

Teraz możemy określić liczbę δ. Przyjmujemy $\delta = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$ i stwierdzamy, że dla $n > \delta$ zachodzi nierówność

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon \tag{1.27}$$

Definicja 1.23. Mówimy, że ciąg $\{a_n\}$ ma granicę niewłaściwą $\pm\infty$ (jest rozbieżny do $\pm\infty$), gdy

1° $\forall M > 0\ \exists n_0\ \forall n > n_0\ a_n > M$ co oznaczamy symbolem $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

2° $\forall m < 0\ \exists n_0\ \forall n > n_0\ a_n < m$ co oznaczamy symbolem $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$

Prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.17.

1° *Jeżeli $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ i $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, to ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony.*

2° *Jeżeli $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ jest ograniczony, to istnieje podciąg $\{a_{n_k}\}$ ciągu $\{a_n\}$, taki że $\{a_{n_k}\}$ jest zbieżny.*

Dowód.

1° Ponieważ $\exists\ \lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow$ dla $\varepsilon = 1\ \exists\ n_0\ \forall n > n_0\ a - 1 < a_n < a + 1$. Oznaczamy

$$m = \min\{a-1, a_1, \ldots, a_{n_0}]$$
$$M = \max\{a+1, a_1, \ldots, a_{n_0}]$$

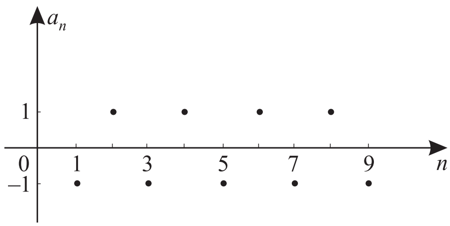
Wówczas mamy:

$$\forall n \in \mathbb{N}\quad m \leqslant a_n \leqslant M$$

Uwaga 1.5. Ciąg ograniczony nie musi być zbieżny.

Przykład 1.19.
Ciąg $\{(-1)^n\}$ jest ograniczony ale nie jest zbieżny. Mamy (patrz rys. 1.6)

$$a_n = (-1)^n \quad \begin{array}{lll} \text{dla} & n = 2k & a_{2k} = (-1)^{2k} = 1 \\ \text{dla} & n = 2k+1 & a_{2k+1} = (-1)^{2k+1} = -1 \end{array}$$



Rys. 1.6

Definicja 1.24. Ciąg $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ nazywamy
1° rosnącym (ściśle rosnącym), gdy dla $\forall\ n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} > a_n$
2° niemalejącym, gdy dla $\forall\ n \in \mathbb{N}\ a_{n+1} \geqslant a_n$
3° malejącym (ściśle malejącym), gdy $\forall\ n \in \mathbb{N}\ a_{n+1} < a_n$
4° nierosnącym, gdy $\forall\ n \in \mathbb{N}\ a_{n+1} \leqslant a_n$

Ciagi niemalejąjce i nierosnące nazywamy ciągami monotonicznymi. Ciągi rosnące i malejące nazywamy ciągami ściśle monotonicznymi. Mamy następujcące twierdzenie.

Twierdzenie 1.18. *Jeżeli $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ jest ciągiem monotonicznym to wówczas:*
1° *jeżeli ciąg $\{a_n\}$ jest ciągiem ograniczonym, to $\exists\ \lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$ i wtedy*
  a) $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_n\{a_n\}$ gdy ciąg $\{a_n\}$ jest ciągiem rosnącym
  b) $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf_n\{a_n\}$ gdy ciąg $\{a_n\}$ jest ciągiem malejącym
2° *jeżeli ciąg $\{a_n\}$ jest nieograniczony to $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ lub $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.*

Dowód.
1° Niech np. ciąg $\{a_n\}$ będzie ciągiem rosnącym. Niech $M = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{a_n\}$ wtedy dla $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ n_0$, taki, że $M - \varepsilon < a_{n_0}$.

Ponieważ $\{a_n\}$ jest ciągiem rosnącym więc dla $\forall\ n > n_0\ a_{n_0} < a_n$. Zatem mamy:

$$\forall\ n > n_0\ M - \varepsilon < a_{n_0} < a_n < M + \varepsilon \Leftrightarrow \forall\ n > n_0 \quad |M - a_n| < \varepsilon$$

tzn $\lim_{n\to\infty} a_n = M$ c.n.d.

Twierdzenie 1.19. *Jeżeli* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, *to wtedy*

1° *jeżeli* $a < b$, *to* $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\ n > n_0\ a_n < b_n$
2° *jeżeli* $\forall\ n > n_0\ a_n \leqslant b_n$, *to* $a \leqslant b$.

Dowód. Pomijamy.

Twierdzenie 1.20. *(o trzech ciągach) Niech* $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\} \subset \mathbb{R}$ *oraz niech* $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = g \in \mathbb{R}$, *jeśli*

$$\forall\ n > n_0, \quad a_n \leqslant b_n \leqslant c_n, \quad \textit{to} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = g. \tag{1.28}$$

Definicja 1.25. Niech $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$, $\{a_{n_k}\} \subset \{a_n\}$. Jeżeli $\exists\ \lim_{k\to\infty} a_{n_k}$ (właściwa lub niewłaściwa), to tę granicę nazywamy granicą częściową lub punktem skupienia ciągu $\{a_n\}$.

Twierdzenie 1.21. *Z każdego ciągu* $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ *można wybrać podciąg* $\{a_{n_k}\}$ *zbieżny do granicy skończonej lub rozbieżny do* $\pm\infty$.

Dowód. Pomijamy.

Definicja 1.26.

1° Niech ciąg $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$, gdzie $\mathbb{R}$ jest przestrzenią metryczną z naturalną metryką. Liczbę $x \in \mathbb{R}$ nazywamy punktem skupienia tego ciągu, gdy istnieje podciąg $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ taki, że $\lim x_{n_k} = x$.
Symbolem $A(x_n)$ oznaczamy zbiór wszystkich punktów skupienia ciągu (x_n)
2° Niech $\{x_n\}$ będzie ciągiem ograniczonym, wtedy kres górny zbioru $A(x_n)$ nazywamy górną granicą ciągu (x_n) i oznaczamy symbolem

$$\limsup x_n = \sup A\{x_n\} \tag{1.29}$$

3° Kres dolny zbioru $A(x_n)$ nazywamy dolną granicą ciągu (x_n), co oznaczamy

$$\liminf x_n = \inf A(x_n) \tag{1.30}$$

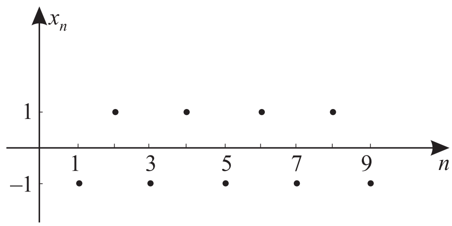
Przykład 1.20.
Obliczyć górną i dolną granicę ciągu $x_n = (-1)^n$

Rozwiązanie:

1. Wyznaczamy $A(x_n)$:

$$x_{n_k} = (-1)^{2k} \to 1$$
$$x_{n_k} = (-1)^{2k-1} \to -1$$

Zatem $A(x_n) = \{-1, 1\}$.



Rys. 1.7

2. Obliczamy granicę górną i dolną:

$$\limsup(-1)^n = \sup A(x_n) = \sup\{-1,1\} = 1$$
$$\liminf(-1)^n = \inf A(x_n) = \inf\{-1,1\} = -1$$

Odpowiedź.
$\limsup(-1)^n = +1$, $\liminf(-1)^n = -1$ (patrz rys. 1.7)

Przykład 1.21.
Udowodnić, że w przestrzeni $\mathbb{R}$ z metryką naturalną
a) $\lim q^n = 0$ dla $|q| < 1$
b) $\lim \sqrt[n]{n} = 1$.

Rozwiązanie:
a) Skorzystamy z definicji granicy ciągu

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon > 0\ \ \forall n \in \mathbb{N}\ (n > N_\varepsilon \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon)$$

Aby to wykazać rozważymy nierówność

$$(x_n = q^n,\ x = 0)$$

$$|q^n - 0| = |q^n| = |q|^n < \varepsilon$$

czyli

$$n \log|q| < \log\varepsilon$$
$$\Downarrow$$
$$n > \frac{\log\varepsilon}{\log|q|} = N_\varepsilon (\log|q| < 0)$$

Zatem mamy:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon = \frac{\log\varepsilon}{\log|q|} \quad \forall n > N\big(n > N \Rightarrow |q^n - 0| < \varepsilon\big)$$

c.n.d.

b) W tym przypadku mamy: $x_n = \sqrt[n]{n}$, $x = 1$. Należy zatem dokonać oceny wyrażenia $|\sqrt[n]{n} - 1|$. Zauważmy, że

$$n = [1 + (\sqrt[n]{n} - 1)]^n$$

Stosując do ostatniego wyrażenia wzór dwumienny Newtona, dostajemy

$$[1 + \sqrt[n]{n} - 1]^n = 1 + n(\sqrt[n]{n} - 1) + \frac{n(n-1)}{2}(\sqrt[n]{n} - 1)^2 + \cdots (\sqrt[n]{n} - 1)^n$$

Ponieważ $\sqrt[n]{n} > 1 > 0$ dla $n > 1$, zatem mamy:

$$n - 1 > \frac{n(n-1)}{2}(\sqrt[n]{n} - 1)^2$$

czyli

$$\frac{2}{n} > (\sqrt[n]{n} - 1)^2$$

Stąd

$$(\sqrt[n]{n} - 1) < \sqrt{\frac{2}{n}} < \varepsilon$$

Zatem $n > \frac{2}{\varepsilon^2} = \mathbb{N}_\varepsilon$.
Wobec tego mamy:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; N_\varepsilon = \frac{2}{\varepsilon^2} \; \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > \frac{2}{\varepsilon^2} \Rightarrow |\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon)$$

c.n.d.

Twierdzenie 1.22. *Jeżeli* $\lim_{n\to\infty}(x_n) = x$ *i* $\lim_{n\to\infty}(y_n) = y$ *to*

$$\begin{array}{ll} 1^\circ & \lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y \\ 2^\circ & \lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = x - y \\ 3^\circ & \lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = x \cdot y \\ 4^\circ & \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{x}{y} \end{array} \tag{1.31}$$

o ile $y_n \neq 0$ *oraz* $y \neq 0$

Przykład 1.22.
Wykazać, że $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ dla $a > 0$.

Rozwiązanie:

1° Niech $a > 1$, to wówczas $1 < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{n}$. Stosując twierdzenie o trzech ciągach otrzymujemy $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$

2° Niech $0 < a < 1$. Wówczas mamy:

$$\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}},$$

czyli

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = 1 \quad \text{bo} \quad \frac{1}{a} > 1$$

c.n.d.

Definicja 1.27. Niech A oznacza zbiór wszystkich granic częściowych ciągu $\{a_n\}$. Wtedy granicę górną i dolną ciągu $\{a_n\}$ określamy odpowiednio jako

$$\lim_{n\to\infty} \sup a_n = \begin{cases} +\infty & \text{gdy} \quad +\infty \in \mathbb{A} \\ \sup A & \text{gdy} \quad +\infty \notin \mathbb{A} \text{ i } \mathbb{A} \neq \varnothing \\ -\infty & \text{gdy} \quad \mathbb{A} = \{-\infty\} \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \inf a_n = \begin{cases} -\infty & \text{gdy} \quad -\infty \in \mathbb{A} \\ \inf \mathbb{A} & \text{gdy} \quad -\infty \notin \mathbb{A} \text{ i } \mathbb{A} \neq \varnothing \\ +\infty & \text{gdy} \quad \mathbb{A} = \{+\infty\} \end{cases}$$

Uwaga 1.6.

a) Z określenia górnej i dolnej granicy ciągu $\{a_n\}$ wynika, że $\exists$ podciągi ciągu $\{a_n\}$ zbieżne do granicy górnej i dolnej ciągu $\{a_n\}$.

b) Zbiór $\mathbb{A}$ jest **domknięty**.

Twierdzenie 1.23. *Niech* $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ *wtedy*

1° *Jeżeli* $a > \lim_{n\to\infty} \sup a_n$, *to* $a_n < a$ *dla prawie wszystkich** n.

2° *Jeżeli* $a < \lim_{n\to\infty} \inf a_n$, *to* $a_n > a$ *dla prawie wszystkich* n.

Twierdzenie 1.24. *Niech* $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$. *Wówczas*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \inf a_n = \lim_{n\to\infty} \sup a_n = a \tag{1.32}$$

tzn. $\mathbb{A} = \{a\}$.

Wniosek 1.3. Ciąg $\{a_n\}$ jest rozbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $\exists$ podciągi $\{a_{n_k}\}, \{a_{n_1}\} \subset \{a_n\}$, takie że

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} \neq \lim_{l\to\infty} a_{n_l}$$

* Zwrot „prawie wszystkie” n oznacza wszystkie z wyjątkiem ich skończonej liczby.

1.4. Pewne ciągi specjalne

1° $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

2° Jeżeli $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < m \leqslant a_n \leqslant M$ to $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$. W szczególności, gdy $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = a > 0$ oraz $\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_n \geqslant 0$ to $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$

3°

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{gdy} \quad |q| < 1 \\ 1 & \text{gdy} \quad q = 1 \\ +\infty & \text{gdy} \quad q > 1 \\ \sim\exists & \text{gdy} \quad q \leqslant -1 \end{cases} \tag{1.33}$$

4° $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ gdzie $e = 2,71828\ldots$ — liczba niewymierna zwana stałą Eulera.

5° $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$

6° $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, to $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$

Twierdzenie 1.26. *(Warunek Cauchy'ego zbieżności ciągu liczbowego) Na to, aby ciąg $(x_n) \subset \mathbb{R}$ był zbieżny potrzeba i wystarcza, aby ciąg ten spełniał warunek Cauchy'ego*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon > 0\ \forall n, m \in N (n > N_\varepsilon \wedge m > N_\varepsilon \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon)$$

Dowód. Pomijamy.

Przykład 1.23.
Zbadać zbieżność ciągu

$$x_n = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^3} \tag{1.34}$$

Rozwiązanie:
Sprawdzamy, czy zachodzi warunek Cauchy'ego. Dla $m > n$ weźmy $m = n + p$ i oszacujemy

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| = \left| \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(n+k)^3} \right| = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(n+k)^3} < \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(n+k)^2} < \\ < \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(n+k-1)(n+k)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} \end{aligned}$$

więc $|x_{n+p} - x_n| \to 0$ gdy $n, p \to \infty$
Zatem ciąg jest zbieżny