Rozdział 2

Równania różniczkowe II-go rzędu

2.1. Pojęcie równania różniczkowego II-go rzędu i jego rozwiązania

Definicja 2.1.
a) Równanie różniczkowe II-go rzędu jest to równanie postaci

$$F\left(x, y, y', y''\right) = 0 \tag{2.1}$$

lub

$$y'' = f\left(x, y, y'\right) \tag{2.2}$$

wyrażające związek między szukaną funkcją $y(x)$, a jej pochodnymi $y'(x)$ i $y''(x)$ oraz zmienną niezależną. Związek ten jest wiadomy (wyraża go symbol F, względnie f) a *niewiadomą jest zależność y od x*. Postać (2.2) nazywamy *postacią normalną*.

Definicja 2.2. Rozwiązaniem, czyli całką równania (2.2) nazywamy każdą funkcję

$$y = \varphi(x) \tag{2.3}$$

która w pewnym przedziale I ma pierwszą i drugą pochodną i spełnia równanie

$$\varphi''(x) = f\left(x, \varphi(x), \varphi'(x)\right), \quad x \in I \tag{2.4}$$

b) Rozwiązaniem ogólnym, czyli całką ogólną równania (2.2) nazywamy wyrażenie

$$y = \phi\left(x, A, B\right) \tag{2.5}$$

które, przy każdej ustalonej parze wartości A, B wybranych dowolnie z pewnych przedziałów, jest rozwiązaniem (całką) równania (2.2).

Całka ogólna jest dwuparametrową rodziną całek danego równania. Funkcje postaci (2.3) dla odróżnienia od całki ogólnej będziemy nazywali *całkami szczególnymi*.

Warunki początkowe

Warunki początkowe dla równania II-go rzędu polegają na podaniu trzech liczb:

$$x_0,\ y_0,\ y_0' \tag{2.6}$$

i żądaniu, aby dla $x = x_0$ pewna całka szczególna tego równania $y = \varphi(x)$ przyjmowała wartości y_0 i aby jednocześnie jej pochodna miała wartość y_0'

$$\varphi\left(x_0\right) = y_0 \qquad \varphi'\left(x_0\right) = y_0' \tag{2.7}$$

Całkę taką łatwo wyznaczyć, jeśli znana jest całka ogólna (2.4). Wystarczy wstawić wartość (2.7) daną w warunkach początkowych do całki ogólnej oraz do związku otrzymanego z całki ogólnej poprzez zróżniczkowanie jej względem x i z otrzymanych w ten sposób równań

$$\begin{aligned} y_0 &= \phi\left(x_0,\ A,\ B\right) \\ y_0' &= \phi'\left(x_0,\ A,\ B\right) \end{aligned} \tag{2.8}$$

wyznaczyć odpowiednią wartość parametrów A i B. Oznaczymy te wartości przez A_0 i B_0.

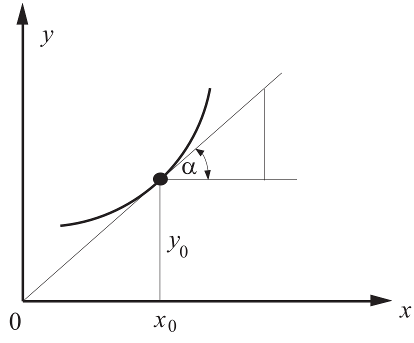
Jeśli teraz w całce ogólnej (2.5) podstawimy $A = A_0, B = B_0$ to otrzymamy całkę szczególną

$$y = \phi\left(x, A_0, B_0\right) \tag{2.9}$$

spełniające dane warunki początkowe.

Uwaga 2.1. Geometrycznie oznacza to, że z nieskończenie wielu krzywych całkowych przechodzących przez punkt (x_0, y_0) wybieramy tą, której styczna ma nachylenie α do osi Ox określone związkiem

$$\operatorname{tg}\alpha = y_0'$$



Rys 2.1

Warunki brzegowe

Warunki brzegowe dla równania II-go rzędu polegają na podaniu dwóch punktów (x_0, y_0) i (x_1, y_1) i żądaniu, aby pewna krzywa całkowa przechodziła przez te punkty.

2.2. Równania różniczkowe drugiego rzędu sprowadzalne do równań różniczkowych pierwszego rzędu

Całkowanie równań różniczkowych II-go rzędu jest znacznie trudniejsze od całkowania równań różniczkowych I-go rzędu. W tabeli podamy typy równań różniczkowych II-go rzędu, które dają się sprowadzić do równań I-go rzędu.

Typ	Przykład	Cecha	Podstawienie
$F(x, y', y'') = 0$	$y''x^3 + y'x^2 = 1$	brak y	$y' = u(x)$ $y'' = u'$
$F(y, y', y'') = 0$	$2y'^2 = (y-1)y''$	brak x	$y' = u(y)$ $y'' = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}y' = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}u$
$F(x, y, y', y'') = 0$ jednorodne	$yy'' - y'^2 = 0$	jednorodne*) względem y, y', y''	$y = e^{Z(x)}$ **)

*) Jednorodne względem y, y', y'' łącznie — oznacza, że każdy wyraz jest tego samego stopnia względem y, y', y'' łącznie

**) Podstawienie $y = e^{Z(x)}$ prowadzi do równania różniczkowego II-go rzędu o niewiadomej $Z(x)$ postaci $F(x, Z'(x), Z''(x)) = 0$, gdzie brak jest Z. Dalej podstawiając $Z'(x) = u(x), Z''(x) = u'(x)$ otrzymujemy równanie I-go rzędu.

Przykład 2.1.
Rozwiązać równanie różniczkowe a) $y'' = xy'$, b) $yy'' = 2y''$

Rozwiązanie:

a) Podstawiamy

$$y' = u, \quad y'' = u'$$

czyli

$$u' = x \cdot u$$

Zatem

$$xu = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

Rozdzielając zmienne mamy:

$$\frac{\mathrm{d}u}{u} = x\mathrm{d}x$$

Całkując dostajemy

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \int x\mathrm{d}x$$

czyli

$$\ln|u| = \frac{x^2}{2} + \ln c$$

Zatem

$$u = Ce^{\frac{x^2}{2}}$$

$$\mathrm{d}y = Ce^{\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x$$

$$y = C\int e^{\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x + A$$

Odpowiedź.

$$y = C\int e^{\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x + A$$

b) Podstawiamy

$$y' = u(y), \qquad y'' = u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}$$

Mamy

$$yu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = 2u^2$$

Rozdzielając zmienne otrzymamy

$$\frac{\mathrm{d}u}{u} = 2\frac{\mathrm{d}y}{y}$$

Całkując obustronnie dostajemy

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = 2\int \frac{\mathrm{d}y}{y}$$

czyli

$$\ln|u| = 2\ln|y| + c$$

Zatem

$$u = Cy^2, \quad \text{gdzie} \quad C = e^c$$

Wracając do podstawienia otrzymujemy

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = Cy^2$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{y^2} = C\mathrm{d}x$$

Zatem

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = C \int \mathrm{d}x$$

czyli

$$-\frac{1}{y} = Cx + D$$

Ostatecznie mamy

$$y = -\frac{1}{Cx + D} \qquad \text{gdzie} \quad C, D \text{ — stałe}$$

Odpowiedź.
Rozwiązanie ma postać

$$y = -\frac{1}{Cx + D}$$

C.O.R.

2.3. Równanie różniczkowe zwyczajne liniowe II-go rzędu

Definicja 2.3. Równanie różniczkowe liniowe II-go rzędu ma postać

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{2.10}$$

gdzie: x — oznacza zmienną niezależną, $y = y(x)$ — jest szukaną funkcją niewiadomą; $p(x), q(x), f(x)$ — są funkcjami wiadomymi określonymi i ciągłymi w przedziale X.
Jeżeli funkcja $f(x)$ nie jest tożsamościowo równa 0, to równanie (2.10) nazywamy równaniem niejednorodnym (RN). Jeżeli prawa strona $f(x)$ równania (2.10) jest tożsamościowo równa zeru, to równanie (2.10) nazywamy równaniem jednorodnym (RJ).

Równanie (2.10) możemy rozwiązać elementarnie, jeśli znamy całkę ogólną odpowiedniego równania jednorodnego.

Równanie (2.10) można rozwiązać elementarnie gdy współczynniki p i q są stałe, w przeciwnym wypadku równanie to na ogół nie daje się rozwiązać elementarnie.

Twierdzenie 2.1. *(Własności rozwiązań RJ)*

a) *Jeśli funkcja $y_1(x)$ jest całką RJ, to wyrażenie $Cy_1(x)$ jest całką RJ (gdzie C — dowolna stała).*
b) *Jeśli $y_1(x)$ i $y_2(x)$ są całkami równania jednorodnego RJ, to*

$$C_1y_1 + C_2y_2$$

jest też całką równania jednorodnego RJ.

Definicja 2.4. Dwie całki y_1 i y_2 RJ nazywamy:

a) liniowo zależnymi w przedziale (a, b), gdy istnieją stałe C_1 i C_2 nie wszystkie równe zeru, takie, że

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 = 0$$

b) liniowo niezależnymi w przedziale (a, b), gdy z równości:

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 = 0$$

wynika, że $C_1 = 0$ oraz $C_2 = 0$

c) o całkach y_1, y_2 liniowo niezależnych w przedziale (a, b) mówimy, że tworzą **układ podstawowy całek**.

Twierdzenie 2.2. *Całki y_1, y_2 równania jednorodnego (RJ) są liniowo niezależne w przedziale (a, b) wtedy i tylko wtedy, gdy wyznacznik Wrońskiego jest różny od zera w przedziale (a, b) tzn*

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \text{dla} \quad \forall x \in (a, b)$$

Dowód.
Konieczność:
Niech y_1, y_2 będą całkami RJ liniowo niezależnymi tzn. z równości $C_1 y_1 + C_2 y_2 = 0$ wynika, że $C_1 = 0$ i $C_2 = 0$.
Różniczkując równość $C_1 y_1 + C_2 y_2 = 0$ mamy:

$$\begin{cases} C_1 y_1 + C_2 y_2 = 0 \\ C_1 y_1' + C_2 y_2' = 0 \end{cases}$$

Zatem układ ten posiada tylko rozwiązanie zerowe; wyznacznik musi być różny od zera.
Dostateczność warunku

Jeżeli $W \neq 0$, to y_1, y_2 są całkami RJ liniowo niezależnymi.

Dowód przeprowadzimy metodą **nie wprost**. Niech y_1, y_2 będą całkami liniowo zależnymi tzn.

$$\begin{cases} C_1 y_1 + C_2 y_2 = 0 \\ C_1 y_1' + C_2 y_2' = 0 \end{cases}$$

Powyższy układ ma rozwiązanie niezerowe tzn. $W = 0$, a to jest sprzeczne z założeniem.

Uzyskana sprzeczność dowodzi tezę twierdzenia.

Twierdzenie 2.3. *Jeżeli całki y_1, y_2 równania jednorodnego są niezależne w przedziale (a, b) to całka ogólna równania jednorodnego wyraża się wzorem*

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

C.O.R.J.

Twierdzenie 2.4. *Jeżeli mamy różną od zera całkę szczególnę RJ, to metodą uzmienniania stałej możemy wyznaczyć całkę ogólną tego równania.*

Dowód.
Założymy, że funkcja

$$y_1(x)$$

jest znaną niezerową całką RJ. Jej iloczyn przez dowolną stałą C jest też całką ale para całek

$$y_1(x),\ Cy_1(x)$$

nie tworzy układu podstawowego. Wobec tego spróbujemy uzmiennić stałą tj. zastąpić ją funkcją $C(x)$ tak dobraną, aby iloczyn

$$C(x)y_1(x) \tag{2.11}$$

był całką RJ i tak, aby para całek

$$y_1(x), \qquad C(x)y_1(x) \tag{2.12}$$

tworzyła układ liniowo niezależny (tzn. układ podstawowy).

Aby wyznaczyć $C(x)$ podstawiamy wyrażenie (2.11) oraz jego pierwszą i drugą pochodną do RJ. Po redukcji otrzymujemy

$$\frac{C''(x)}{C'(x)} = -2\frac{y_1'(x)}{y_1(x)} - p(x) \tag{2.13}$$

czyli po scałkowaniu dostajemy

$$C(x) = \int \frac{e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}}{y_1^2(x)}\mathrm{d}x$$

Zatem, mamy

$$y_2(x) = y_1(x)\left[A + B\int \frac{e^{-P(x)}}{y_1^2(x)}\mathrm{d}x\right] \tag{2.14}$$

gdzie $P(x)$ — jest funkcją pierwotną funkcji $p(x)$.