1

Od zasady szufladkowej do osobliwości niezderzeniowych

Co właściwie robią matematycy? Czym się zajmują? Niniejsza książka wyrosła z rozmaitych prób zmierzenia się z tymi pytaniami.

William Thurston w eseju *O dowodzie i o postępie w matematyce* pisze, że matematycy mają na ogół wrażenie, iż wiedzą, czym jest matematyka, ale trudno im podać jej dobrą bezpośrednią definicję. Owa trudność wydaje mu się czymś istotnym, wskazującym na złożoną i rekurencyjną strukturę matematyki. Odnajduję lekką nutkę jego zawodowej ironii, gdy czytam, jak stwierdza, że można byłoby określić matematykę jako najmniejszą dziedzinę, spełniającą trzy warunki:

- matematyka obejmuje liczby naturalne oraz geometrię płaską i przestrzenną;
- matematyka jest przedmiotem badań matematyków;
- matematykami są ci ludzie, którzy zwiększają i pogłębiają nasze zrozumienie matematyki.

Kto zechce, może zbyć Thurstona lekceważącym prychnięciem, uznając, że matematyka, którą poznał w szkole czy na studiach i o której – jak o biologii, chemii, fizyce, literaturze czy muzyce – ma wszak pewne elementarne pojęcie, jest czymś szerszym, głębszym lub po prostu czymś innym. Znam jednak wielu ludzi, którzy zgodziliby się niemal bez zastrzeżeń z określeniem Thurstona, a sami siebie określają jako matematyków.

Na pytanie: *co właściwie robią matematycy?* Thurston odpowiada jasno: zwiększają i pogłębiają nasze zrozumienie matematyki. Przeciętnie uważny Czytelnik dostrzeże, że nie chodzi tu tylko ani nawet przede wszystkim o to, żeby kogoś uczyć, czy coś komuś objaśniać. Matematycy z definicji Thurstona nie tylko uczą innych, ale odkrywają nową matematykę, odnajdują matematykę znaną wcześniej, a także uczą się sami, od kolegów i z cudzych tekstów, nowych sposobów myślenia.

Jeden z moich warszawskich kolegów, Wojciech Guzicki, rzucił kiedyś w paroosobowym gronie, że matematyki należy uczyć w szkole z trzech powodów. Po pierwsze, jest przydatna; po drugie, porządkuje myślenie; po trzecie, jest po prostu piękna. Przydatności, w sensie cywilizacyjnym, nikt poważny nie będzie zaprzeczał. Bez matematyki nie byłoby ani lotów kosmicznych, ani tomografu komputerowego, ani protokołów komunikacyjnych umożliwiających bezpieczne zakupy w Internecie, ani dokładnych krótkoterminowych prognoz pogody. Argument o porządkowaniu myślenia też przyjmują wszyscy: przeczytać zadanie, zrozumieć polecenie, wypisać dane i niewiadome, zastanowić się spokojnie, rozwiązać krok po kroku i sprawdzić, co właściwie wyszło, a zdobyte dzięki temu doświadczenie wykorzystywać (najlepiej ze zrozumieniem) w przyszłości. To, jak się wydaje, mogłoby dobrze służyć każdemu, niezależnie od tego, jaką drogę w życiu sobie wybierze.

Wzmianka o pięknie potrafi jednak budzić odruchy zdziwienia, a nawet sprzeciwu. Cóż pięknego tkwi, powiedzmy, w bolesnym zakuwaniu do klasówki z algebry? W rozwiązywaniu zadań o cenach bułek i ciastek albo stężeniach pomieszanych roztworów soli? Kłopot polega na tym, że ta część szkolnego oblicza matematyki *w odpowiednio złym wykonaniu* może mieć z matematyką jako taką mniej więcej tyle wspólnego, ile wspólnego z prawdziwą literaturą ma lekcja profesor Bladaczki, kładącej, że Słowacki wielkim poetą był.

Piękno tkwi w urodzie rozumowań, w przeżytym uczuciu zaskoczenia, w potwierdzonych intuicjach i odnalezionym zrozumieniu. Nie chciałbym tu nikogo uczyć; nie zamierzam przedstawiać żadnego przystępnego encyklopedycznego obrazu współczesnej matematyki, bo sam widzę tylko jej skromny wycinek. Chcę natomiast opowiedzieć kilka historii o działalności moich kolegów po fachu. W niektórych będzie trochę szczegółów, zachęty do samodzielnego sięgnięcia po papier i ołówek lub inne narzędzia, w innych – tylko obrazowe i poglądowe opowiastki. Ja sam widzę w tych historiach zarówno potwierdzenie urody i przydatności matematyki, jak i ilustrację słów Thurstona o prawdziwej radości. Widzę w nich także świadectwo słuszności poglądu Davida Hilberta, że niemal cała matematyka polega na rozwiązywaniu problemów i zadań, a nowe teorie czy pojęcia są od tego, żeby pomóc owo rozwiązanie znaleźć lub wyrazić je w sposób przejrzysty i zrozumiały.

Pierwsza z tych historii wiąże się z zaskakującymi, otwartymi, a jednocześnie fundamentalnymi pytaniami, które wciąż zawiera bardzo klasyczna dziedzina: matematyczne podstawy mechaniki Newtona. Dość niedawno, pod sam koniec XX wieku, okazało się na przykład, że w świecie mechaniki newtonowskiej, gdy zaniedbamy efekty relatywistyczne, możliwa jest podróż do nieskończoności w skończonym czasie. Może się zdarzyć, że kilka ciał, poddanych wyłącznie działaniu grawitacji, wpadnie w szalony, coraz szybszy taniec; jedno z nich będzie na przemian usiłowało zderzyć się z pozostałymi i bardzo od nich oddalić, ale okaże się, że ani to pierwsze, ani to drugie – ani ostateczne zderzenie, ani trwałe oddalenie na bezpieczną odległość – nie jest możliwe. Brzmi to jak zły scenariusz filmu *science fiction*, zacznijmy więc od czegoś znacznie prostszego.

Chodzi mi o zasadę szufladkową Dirichleta: jeśli do n szuflad włożymy $n + 1$ (lub więcej) listów, to w pewnej szufladzie znajdą się co najmniej dwa listy. Jest to stwierdzenie tak oczywiste, na pozór wręcz banalne, że trudno sobie wyobrazić, by mogło prowadzić do jakichś szczególnie zaskakujących wniosków. Każdy słyszał, że w odpowiednio dużym mieście z pewnością są dwie osoby, które mają tyle samo włosów na głowie (nie potrafimy jednak łatwo takich osób wskazać), a w każdej szkole, do której chodzi przynajmniej 367 uczniów, na pewno są tacy, którzy obchodzą urodziny tego samego dnia (i nie trzeba uważnie przeglądać wszystkich dzienników, żeby przekonać się, że to prawda).

Spójrzmy na bardziej matematyczny przykład: wśród każdych 501 liczb wybranych spośród $1, 2, \ldots, 1000$ na pewno są dwie takie, z których jedna dzieli drugą bez reszty. Tu akurat nie od razu widać, jak zastosować zasadę szufladkową. Gdybyśmy jednak zapisali każdą z 501 wybranych liczb jako iloczyn pewnej liczby nieparzystej i pewnej potęgi dwójki, tzn. w postaci $2^m \cdot (2l + 1)$, to zauważylibyśmy, że nie wszystkie czynniki nieparzyste są różne. Istotnie, nie mogą być różne, bo jest ich 501, a możliwości wyboru tylko 500, gdyż tylko co druga liczba wśród $1, 2, \ldots, 1000$ jest nieparzysta. Wśród wybranych 501 liczb są więc z pewnością dwie, powiedzmy a i b, które mają ten sam czynnik nieparzysty, tzn.

$$a = 2^m \cdot (2l + 1), \qquad b = 2^k \cdot (2l + 1).$$

Jeśli 2^m jest większe niż 2^k (a przecież możemy przyjąć, że tak jest, bo gdyby było na odwrót, to moglibyśmy zamienić oznaczenia obu liczb), to b dzieli a: w liczniku i mianowniku ułamka a/b można skrócić wspólny czynnik nieparzysty, a mniejsza potęga dwójki z pewnością dzieli większą potęgę. Innymi słowy, $a/b = 2^{m-k}$; wynik dzielenia jest całkowity.

Mój ulubiony przykład zastosowania zasady szufladkowej Dirichleta jest w gruncie rzeczy podobny. Różnica polega na tym, że jeszcze mniej oczywiste jest, czym mają być szufladki i jak się nimi posłużyć, a wnioski są, dla wielu osób, bardziej zaskakujące. Chodzi mi o twierdzenie, które orzeka, że każdy skończony, niezaczynający się od zera ciąg cyfr widnieje na początku (tzn. z lewej strony) rozwinięcia dziesiętnego wielu różnych potęg dwójki. Na przykład, data urodzin każdego Polaka (z numerami PESEL i NIP dorzuconymi na dodatek) znajduje się na początku zapisu dziesiętnego nieskończenie wielu potęg dwójki.

To samo można powiedzieć nie tylko o datach. Istnieją wykładniki n, dla których zapis dziesiętny 2^n zaczyna się od ciągu utworzonego z wypisanych po kolei wszystkich numerów z książki adresowej mojego telefonu komórkowego. Pisząc te słowa, nie potrafię wprawdzie podać żadnej takiej liczby n, ale mimo to mam uczucie niezachwianej pewności, które nie zawsze towarzyszy mi w życiu. Takie uczucie pewności daje matematykowi dowód. Jedną z radości, których dostarcza obcowanie z matematyką, jest właśnie to, że dzięki dowodom można być pewnym różnych rzeczy nieoczywistych.

Nawet dla ciągów jednocyfrowych teza wspomnianego twierdzenia nie jest oczywista. Gdy zaczniemy wypisywać początkowe cyfry liczb 2^n dla $n = 0, 1, 2, \ldots$, to ujrzymy następujący wzór:

$$\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 1,\ 3,\ 6,\ 1,\ 2,\ 5, \\ 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 1,\ 3,\ 6,\ 1,\ 2,\ 5, \\ 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 1,\ 3,\ 6,\ 1,\ 2,\ 5, \\ 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 1,\ 3,\ 6,\ 1,\ 2,\ \ldots \end{array}$$

Siódemek i dziewiątek (na razie) ani śladu, prawda?

Co więcej, komuś niecierpliwemu i nieuważnemu może przyjść do głowy myśl, że ciąg początkowych cyfr potęg dwójki jest okresowy i wszystko w nim powtarza się regularnie, co 10 miejsc. To jednak tylko złudzenie, którego przyczyną jest to, że $2^{10} = 1024$ jest niezłym przybliżeniem liczby 1000. Mnożenie liczby przez 1000 polega przecież na dopisywaniu trzech zer na końcu jej zapisu dziesiętnego i nie ma najmniejszego wpływu na początkowy fragment tego zapisu. Gdy wielokrotnie mnożymy przez 1024, drobne i początkowo niezbyt istotne dodatki z końcowych fragmentów zapisu dziesiętnego zaczynają kumulować się i wzbierać, rozlewając się stopniowo coraz dalej w lewo. Gdybym wypisał wyżej piąty wiersz początkowych cyfr potęg dwójki, to zamiast szóstki byłaby w nim siódemka. Siódemkę zobaczylibyśmy też – na tym samym miejscu! – w kolejnych wierszach, aż do dziesiątego. W jedenastym wierszu miejsce siódemki zajmie ósemka. Obejrzawszy kilkaset takich wierszy po 10 cyfr, można zobaczyć siódemki (i dziewiątki) w różnych miejscach, zjawiające się nieuchronnie, ale w sposób, który trudno uznać za idealnie okresowy.

Aby *udowodnić*, że siódemka jest początkową cyfrą nieskończenie wielu potęg dwójki, trzeba wyjść poza krąg najprostszych eksperymentów i *zrozumieć*, co to znaczy, że zapis dziesiętny liczby 2^n zaczyna się od siódemki. Otóż, jest tak wtedy, gdy 2^n znajduje się między dwiema liczbami: pierwszą z nich jest siódemka z pewną liczbą zer na końcu, a drugą ósemka z taką samą liczbą zer. Wszystkie liczby między tymi dwiema zaczynają się od siódemki. I na odwrót, każdą liczbę, która ma za pierwszą cyfrę siódemkę, można wstawić w jeden z przedziałów o końcach $70\ldots0$ i $80\ldots0$ (gdzie zer jest w obu liczbach tyle samo).

Teraz, żeby było poręczniej, użyjmy symboli: 7 jest pierwszą cyfrą liczby 2^n wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnego naturalnego k mamy $7 \cdot 10^k < 2^n < 8 \cdot 10^k$. Aby dostać prostszy, równoważny zapis, zlogarytmujemy te nierówności stronami. Jako podstawę logarytmu wybierzemy 10, bo potęga dziesiątki występuje w naszym warunku aż dwukrotnie. Logarytmując, otrzymujemy $k + \log 7 < n \log 2 < k + \log 8$. Ponieważ liczby $\log 7$ i $\log 8$ należą do przedziału $(0, 1)$, więc k jest częścią całkowitą liczby $n \log 2$, tzn. $k = [n \log 2]$ (nawiasów kwadratowych użyjemy do oznaczania części całkowitej). Odejmując k od uzyskanych nierówności, dostaniemy ostatecznie

$$\log 7 < n \log 2 - [n \log 2] < \log 8.$$

Być może czyimś zdaniem to wyrażenie jest bardziej zagadkowe od potocznej frazy 7 *jest pierwszą cyfrą liczby* 2^n, ale za to łatwiej jest poddać je analizie. Zanim to zrobimy, zwróćmy uwagę na jedną rzecz. Otóż, logarytmowanie pozwoliło zamienić obserwację potęg dwójki, rosnących bardzo szybko i rozmieszczonych na osi liczbowej w coraz większych odstępach, w analizowanie kolejnych wielokrotności $\log 2$, które rosną znacznie wolniej, a na osi liczbowej rozmieszczone są równomiernie, jak koraliki na sznurku albo słupki kilometrowe przy prostej szosie. Udało się stwierdzić, że poszukiwanie potęg dwójki z pierwszą cyfrą 7 jest tym samym, co sprawdzanie, czy któryś z wyrazów ciągu $a_n := nx - [nx]$, gdzie $x = \log 2$, a $n = 0, 1, 2, \ldots$, trafi do przedziału o końcach $\log 7$ i $\log 8$.

Mówiąc nieco mętnie, to trochę tak, jakbyśmy zdołali spojrzeć na badane zjawisko z innej perspektywy, dostrzegając w nim – dzięki doborowi skali lub przyrządu do obserwacji — pewną równomierność i symetrię. Obserwujemy na osi liczbowej ślady wędrówki kogoś, kto wyruszył z zera i stawia równe kroki długości $x = \log 2$. Interesują nas nie miejsca, gdzie wędrowiec stawiał stopy (to są liczby nx), ale odległości tych miejsc od najbliższych (z lewej strony) liczb całkowitych. Owe odległości to właśnie liczby $a_n = nx - [nx]$.

Gdyby na przykład $x = 41/137$, ciąg a_n części ułamkowych kolejnych wielokrotności x byłby okresowy: wyrazy o numerach różniących się o 137 byłyby równe. Podobnie byłoby dla każdej liczby wymiernej x. *Jednak* $\log 2$ *nie jest liczbą wymierną:* gdyby $\log 2 = p/q$, to wprost z definicji logarytmu mielibyśmy $10^{p/q} = 2$, czyli $10^p = 2^q$, co jest niemożliwe (lewa strona dzieli się przez 5, a prawa nie). Kluczową i przełomową dla całego rozumowania konsekwencją niewymierności $x = \log 2$ jest to, że *wszystkie wyrazy ciągu* a_n *są różne*. Gdyby bowiem $a_n = a_m$ dla jakichś $n \neq m$, to przekształcając równość $nx-[nx] = mx-[mx]$, zapisalibyśmy x jako ułamek o liczniku i mianowniku całkowitym, $x = ([nx]-[mx])/(n-m)$. Wiemy jednak, że $x = \log 2$ takim ułamkiem nie jest!

Teraz, idąc za ciosem, możemy zrozumieć całą sytuację do końca.

Podzielmy najpierw odcinek $[0, 1]$ na m równych przedziałów, wybierając m tak, żeby długość każdej części była mniejsza niż $\log 8 - \log 7$ (kto posłuży się np. kalkulatorem, zobaczy, że wystarczy w tym celu wziąć $m = 18$; jakakolwiek liczba $m > 18$ też byłaby dobra). Ponieważ liczby a_n są różne, więc któreś dwie spośród $a_1, a_2, \ldots, a_{m+1}$ – powiedzmy a_s i a_{s+k} – należą do tego samego przedziału długości $1/m$. (Tu, jak widać, skorzystaliśmy z zasady szufladkowej!)

Jak otrzymać a_{s+k}, gdy znamy a_s? To nietrudne; obserwujemy wszak wędrówkę równymi krokami po osi liczbowej i mierzymy odstępy śladów wędrowca od ostatniej miniętej liczby całkowitej. Po s krokach wędrowiec znajduje się w punkcie sx, w odległości a_s od ostatniej miniętej liczby całkowitej, którą jest $[sx]$. Gdy zrobi k kolejnych kroków, znajdzie się w punkcie $(s + k)x$, w odległości a_{s+k} od ostatniej miniętej liczby całkowitej, którą jest $[(s+k)x]$. Jednak liczby a_s i a_{s+k} różnią się tylko nieznacznie: