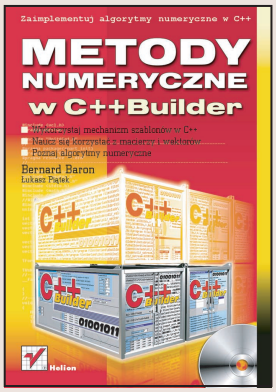
Metody numeryczne w C++Builder



Autorzy: Bernard Baron, Łukasz Piątek
ISBN: 83-7361-544-X
Format: B5, stron: 552

Metody numeryczne są to sposoby rozwiązywania złożonych problemów matematycznych za pomocą narzędzi obliczeniowych udostępnianych przez popularne języki programowania. Jeden z najpopularniejszych języków – C++, chociaż nie był projektowany z myślą o zastosowaniu go w obliczeniach numerycznych, posiada mechanizmy, które umożliwiają stosunkowo łatwą implementację algorytmów obliczeniowych. Dzięki uniwersalności mechanizmu szablonów programista może tworzyć procedury numeryczne, w których da się określić precyzję obliczeń zmiennoprzecinkowych. Procedury stworzone w C++ nadają się do przeprowadzania obliczeń zarówno w dziedzinie liczb rzeczywistych, jak i zespolonych.

Książka „Metody numeryczne w C++Builder" przedstawia najczęściej wykorzystywane algorytmy numeryczne wraz z przykładami ich implementacji w języku C++. Każde zagadnienie jest omówione zarówno od strony teoretycznej, jak i praktycznej, co ułatwia jego zrozumienie i pozwala na modyfikacje zamieszczonych w książce kodów źródłowych. Książka zawiera również opis zagadnień związanych z językiem C++, niezbędnych do poznania i prawidłowego wykorzystywania biblioteki obliczeń numerycznych.

- Algebra macierzy i równania liniowe
- Całkowanie i różniczkowanie numeryczne
- Wybrane algorytmy interpolacji i aproksymacji
- Wyznaczanie minimów funkcji
- Rozwiązywanie równań nieliniowych i wyznaczanie wartości własnych macierzy
- Układy równań różniczkowych liniowych i nieliniowych
- Przekształcenia Fouriera i Laplace'a

Wydawnictwo Helion
ul. Chopina 6
44-100 Gliwice
tel. (32)230-98-63
e-mail: helion@helion.pl

Spis treści

Rozdział 6.

Układy równań różniczkowych liniowych o stałych współczynnikach

Zadany jest układ N równań różniczkowych liniowych niejednorodnych:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j(t) + \sum_{j=1}^{W} b_{ij} u_j(t), \quad (i = 1,2,\ldots,N), \tag{6.1}$$

gdzie współczynniki a_{ij} oraz b_{ij} są rzeczywiste. Układ ten można zapisać w postaci macierzowej:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \tag{6.2}$$

gdzie:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_N(t) \end{bmatrix}; \quad \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{dx_N(t)}{dt} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1N} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2N} \\ \ldots\ldots \\ a_{N1}a_{N2}\ldots a_{NN} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11}b_{12}\ldots b_{1W} \\ b_{21}b_{22}\ldots b_{2W} \\ \ldots\ldots \\ b_{N1}b_{N2}\ldots b_{NW} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ . \\ . \\ . \\ u_w(t) \end{bmatrix}.$$

Na człony niejednorodne układu (6.1) składa się W wymuszeń $u_j(t)$ (j = 1, 2, …, W) występujących ze współczynnikami b_{ij} macierzy prostokątnej **B**. W teorii równania (6.2) centralną rolę odgrywa funkcja wykładnicza $e^{\mathbf{A}t}$, macierzy kwadratowej **A** przemnożonej przez zmienną niezależną t, zdefiniowaną szeregiem macierzowym [7]:

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{1} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}(\mathbf{A}t)^2 + \ldots + \frac{1}{k!}(\mathbf{A}t)^k + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mathbf{A}t)^k}{k!}. \tag{6.3}$$

Szereg macierzowy (6.3) jest równoważny z N^2 zwykłych skalarnych szeregów potęgowych:

$$\delta_{ij} + (\mathbf{A}t)_{ij} + \frac{1}{2!}\left\{(\mathbf{A}t)^2\right\}_{ij} + \ldots + \frac{1}{k!}\left\{(\mathbf{A}t)^k\right\}_{ij} + \ldots, \quad (i,j = 1,2,\ldots,N)$$

Dla zrozumienia konstrukcji całki ogólnej równania (6.2) niezbędne będą następujące własności funkcji wykładniczej $e^{\mathbf{A}t}$:

1. Jeżeli $t = 0$, to zgodnie z definicją (6.3)

$$e^{\mathbf{A}0} = \mathbf{1} \text{ (macierz jednostkowa } N{\cdot}N\text{-wymiarowa).} \tag{6.4}$$

2. Jeżeli macierz **A** komutuje z macierzą **B**, a więc **AB** = **BA**, to:

$$e{\cdot}\, e^{\mathbf{B}t} = e^{(\mathbf{A}+\mathbf{B})t}. \tag{6.5}$$

3. Ponieważ na mocy własności (6.5) $e^{\mathbf{A}t}\, e^{-\mathbf{A}t} = e^{(\mathbf{A}-\mathbf{A})t} = \mathbf{1}$, więc macierz odwrotna macierzy $e^{\mathbf{A}t}$ ma postać:

$$\left[e^{\mathbf{A}t}\right]^{-1} = e^{-\mathbf{A}t}. \tag{6.6}$$

4. Różniczkując obie strony równania macierzowego (6.3) ze względu na t oraz wyłączając wspólny czynnik **A** z wyrazów szeregu nieskończonego, otrzymujemy:

$$\frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{A}. \tag{6.7}$$

5. Mnożąc lewostronnie lub prawostronnie równanie macierzowe (6.7) przez $\mathbf{A}^{-1}$ (macierz odwrotna macierzy **A**), a następnie całkując tak otrzymywane równania ze względu na t od t_1 do t_2, otrzymujemy:

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{\mathbf{A}t}\,dt = \mathbf{A}^{-1}\left(e^{\mathbf{A}t_2} - e^{\mathbf{A}t_1}\right) = \left(e^{\mathbf{A}t_2} - e^{\mathbf{A}t_1}\right)\mathbf{A}^{-1}. \tag{6.8}$$

Do rozwiązania układu równań różniczkowych liniowych (6.2) można zastosować metodę uzmiennienia stałych. W tym celu najpierw rozpatruje się przypadek, gdy $\mathbf{u}(t) \equiv 0$, co oznacza, że równanie (6.2) jest jednorodne

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t). \tag{6.9}$$

Łatwo wykazać, że całka ogólna równania jednorodnego (6.9) ma postać:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{y}, \tag{6.10}$$

gdzie $\mathbf{y}$ jest wektorem N-wymiarowym o składowych stałych.

Istotnie, z własności (6.7) wynika

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(e^{\mathbf{A}t}y(\mathbf{t})\right) = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}y = \mathbf{A}x(t). \tag{6.11}$$

Zgodnie z metodą uzmiennienia stałych przyjmuje się dalej, że wektor $\mathbf{y}$ jest funkcją zmiennej t, co daje:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\,\mathbf{y}(t), \tag{6.12}$$

a następnie podstawia się wyrażenie (6.12) do równania niejednorodnego (6.2) z uwzględnieniem własności (6.7)

$$\mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{y}(t) + e^{\mathbf{A}t}\,\frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{y}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t). \tag{6.13}$$

Upraszczając równanie (6.13) o człon $\mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{y}(t)$ oraz mnożąc je lewostronnie przez macierz $e^{\mathbf{A}t}$, otrzymujemy na mocy własności (6.6)

$$\frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} = e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{B}\mathbf{u}(t). \tag{6.14}$$

Całkując równanie (6.14) ze względu na t od t_0 do t, otrzymujemy:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau. \tag{6.15}$$

Jeżeli zadany jest wektor wartości początkowych $\mathbf{x}(t_0)$, to odpowiadający mu wektor $\mathbf{y}(t_0)$ możemy wyznaczyć z równania (6.12), stosując własność (6.6)

$$\mathbf{y}(t_0) = e^{-\mathbf{A}t}\,\mathbf{x}(t_0). \tag{6.16}$$

Uwzględniając równanie (6.15) wraz z podstawieniem (6.16) w równaniu (6.12), otrzymujemy następujące rozwiązanie równania (6.2)

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0) + e^{\mathbf{A}t}\int_{t_0}^{t} e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \ . \tag{6.17}$$

Równanie (6.17) nie nadaje się do bezpośredniego obliczenia numerycznego. Rozwiązanie dokładne (6.17) równania (6.2) możemy jednak wykorzystać w metodzie krokowej, zastępując to równanie równaniem różnicowym, przyjmując $t_0 = kT$ i $t = (k + 1)T$

$$\mathbf{x}\left[(k+1)T\right] = e^{\mathbf{A}T}\mathbf{x}(kT) + e^{\mathbf{A}(k+1)T}\int_{kT}^{(k+1)T} e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \ . \tag{6.18}$$

W obliczaniu całek (6.18) mogą wystąpić trudności związane z występowaniem ujemnych i dużych co do modułu wartości własnych macierzy **A**. Ze względu na możliwość takiego przypadku, musimy aproksymować funkcję wektorową wymuszającą **u**(*t*), nie zmieniając jądra $e^{\mathbf{A}t}$ w całce równania (6.18).

Niech zachodzi przypadek ogólny, dla którego macierz **A** ma dzielniki elementarne:

$$(\lambda - \lambda_1)^{p_1}, (\lambda - \lambda_2)^{p_2}, \ldots, (\lambda - \lambda_s)^{p_s} \ ,$$

gdzie wśród wartości własnych $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ macierzy **A** będących, zgodnie z definicją, zerami wielomianu charakterystycznego macierzy **A**

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$$

mogą być liczby jednakowe; $1 \le p_n \le N$, przy czym $p_1 + p_2 + \ldots + p_s = M$. Dowodzi się, że w takim przypadku istnieje taka macierz nieosobliwa **S**, że

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}^{-1}\,\mathbf{C}\mathbf{S}, \tag{6.19}$$

gdzie macierz **C** jest macierzą quasi-diagonalną zwaną kanoniczną macierzą Jordana [30]

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{p1}(\lambda_1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_{p1}(\lambda_2) & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots & \mathbf{I}_{pi}(\lambda_i) \end{bmatrix}; \ \mathbf{I}_{pi}(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_i & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_i & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & \lambda_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \lambda_i \end{bmatrix} \tag{6.20}$$

Stosując transformację (6.19), funkcję wykładniczą $e^{\mathbf{A}t}$ możemy przekształcić następująco:

$$e^{\mathbf{A}t} = e^{(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{S})t} = e^{\mathbf{S}^{-1}(\mathbf{C}t)\mathbf{S}} = \mathbf{S}^{-1}e^{\mathbf{C}t}\mathbf{S} \ . \tag{6.21}$$

Ponieważ macierz **C** jest quasi-diagonalną, to:

$$e^{\mathbf{C}t} = \begin{bmatrix} e^{\mathbf{I}_{p1}(\lambda_1)t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\mathbf{I}_{p2}(\lambda_2)t} & 0 \\ . & . & . \\ 0 & 0 & e^{\mathbf{I}_{ps}(\lambda_s)t} \end{bmatrix}. \tag{6.22}$$

Zgodnie z definicją macierzowej funkcji wykładniczej oraz macierzy (6.20) zachodzi [30]:

$$e^{\mathbf{I}_{p1}(\lambda_i)t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_i t} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ te^{\lambda_i t} & e^{\lambda_i t} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{t^2}{2!}e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} & e^{\lambda_i t} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{t^{p_i-1}}{(p_i-1)!}e^{\lambda_i t} & \frac{t^{p_i-2}}{(p_i-2)!}e^{\lambda_i t} & \frac{t^{p_i-3}}{(p_i-3)!}e^{\lambda_i t} & \dots & e^{\lambda_i t} \end{bmatrix}. \tag{6.23}$$

Wzory (6.17), (6.21) i (6.22) określają strukturę rozwiązania równania różniczkowego (6.2), a w szczególności jego związek z wartościami własnymi λ_i występującymi w kombinacjach funkcji $e^{\lambda_i t}$ przemnożonych przez wielomiany $P_i(t)$ nie większego stopnia niż $p_i - 1$, gdzie p_i jest stopniem dzielnika elementarnego odpowiadającego wartości własnej λ_i, tj. $P_i(t)e^{\lambda_i t}$. Załóżmy w ogólnym przypadku, że wartości własne λ_i macierzy **A** są zespolone

$$\lambda_i = \alpha_i + j\beta_i, \quad (i = 1,2,\dots,N). \tag{6.24}$$

Jeżeli $\mathrm{Re}\{\lambda_i\} = \alpha_i > 0$, to odpowiednie składniki rozwiązania $P_i(t)$ wzrastają wykładniczo z członem wielomianowym $P_i(t)$ gdy czas t wzrasta. Jeżeli $\alpha_i < 0$, to odpowiednie składniki rozwiązania $P_i(t)e^{\lambda_i t}$ maleją gdy czas t wzrasta. W każdym przypadku, jeśli $\mathrm{Im}\{\lambda_i\} = \beta_i \neq 0$, to jak wiadomo λ_i tworzy zespoloną parę sprzężoną z odpowiednią wartością własną λ_i^*, co odpowiada składnikowi rozwiązania sinusoidalnemu z wagą wykładniczą $e^{\lambda_i t}$ i wielomianową $P_i(t)$

$$P_i(t)e^{\alpha_i t}\sin\beta_i t\,. \tag{6.25}$$

6.1. Równania różnicowe dla różnych aproksymacji funkcji wymuszających

Do numerycznego rozwiązania układu równań różniczkowych liniowych (6.2) możemy wykorzystać równanie różnicowe (6.18), przyjmując różną aproksymację funkcji wymuszającej $\mathbf{u}(t)$. W niniejszym opracowaniu podane będą konstrukcje tych algorytmów dla trzech przypadków, a mianowicie dla aproksymacji funkcji wymuszającej w postaci funkcji przedziałami stałej, liniowej i kwadratowej.

6.1.1. Wymuszenie aproksymowane funkcjami przedziałami stałymi

Niech wymuszenie wektorowe $\mathbf{u}(t)$ jest dane w postaci funkcji przedziałami stałej, takiej, że:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(kT) \text{ dla } kT \le t \le (k+1)T,\ k = 0,1,2,\ldots \tag{6.26}$$

W takim przypadku wykonując całkowanie w równaniu różnicowym (6.18) z uwzględnieniem wzoru (6.8), otrzymujemy [7]:

$$\int_{\mathrm{kT}}^{(\mathrm{k+1})\mathrm{T}} \mathrm{e}^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{Bu}(\tau)\mathrm{d}\tau = -\mathrm{e}^{-\mathbf{A}\tau}\Big|_{\mathrm{kT}}^{(\mathrm{k+1})\mathrm{T}} \mathbf{A}^{-1}\mathbf{Bu}(\mathrm{kT}) = \tag{6.27}$$
$$= \left(-\mathrm{e}^{-\mathbf{A}(\mathrm{k+1})\mathrm{T}} + \mathrm{e}^{-\mathbf{A}k\mathrm{T}}\right)\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Bu}(\mathrm{kT}).$$

Umieszczając powyższy wynik całkowania w równaniu (6.18), otrzymujemy:

$$\mathbf{x}\left[(\mathrm{k}+1)\mathrm{T}\right] = \mathrm{e}^{\mathbf{A}\mathrm{T}}\mathbf{x}(\mathrm{kT}) + \mathrm{e}^{\mathbf{A}(\mathrm{k+1})\mathrm{T}}\left(-\mathrm{e}^{-\mathbf{A}(\mathrm{k+1})\mathrm{T}} + \mathrm{e}^{-\mathbf{A}\mathrm{kT}}\right)\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Bu}(\mathrm{kT}) = \tag{6.28}$$
$$= \mathrm{e}^{\mathbf{A}\mathrm{T}}\mathbf{x}(\mathrm{kT}) + \left(\mathrm{e}^{\mathbf{A}\mathrm{T}} - \mathbf{1}\right)\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Bu}(\mathrm{kT}),$$

gdzie: **1** — macierz jednostkowa.

W równaniu różnicowym (6.28) powinniśmy, ze względu na minimum operacji numerycznych, obliczać macierz $(e^{\mathbf{A}T} - \mathbf{1})\mathbf{A}^{-1}$, nie wykonując pomocniczych obliczeń macierzy $e^{\mathbf{A}T}$ oraz $\mathbf{A}^{-1}$, lecz wykorzystując równość:

$$\left(e^{\mathbf{A}T} - 1\right)\mathbf{A}^{-1} = T\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathbf{A}T)^n}{(n+1)!} \tag{6.29}$$

wnikającą z definicji (6.3).

Gdy uwzględnimy więc równanie (6.29) oraz oznaczenia macierzy:

$$\mathbf{F} = e^{\mathbf{A}T} = T\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathbf{A}T)^n}{n!}; \tag{6.30}$$

$$\mathbf{G}_0 = \left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathbf{A}T)^n}{(n+1)!}\right]\mathbf{B}T \tag{6.31}$$

i wektorów

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}(kT);\ \mathbf{u}(k) = \mathbf{u}(kT), \tag{6.32}$$

formuła rekurencyjna (6.28) przyjmie postać:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}_0\mathbf{u}(k). \tag{6.33}$$

Nie istnieje więc potrzeba obliczania macierzy odwrotnej $\mathbf{A}^{-1}$, jak by to wynikało z równania (6.28). Mając na uwadze dalszą minimalizację operacji numerycznych, powinniśmy zauważyć, że formowanie macierzy $\mathbf{F}$ i $\mathbf{G}_0$ (wzory (6.30) i (6.31)) należy prowadzić równolegle ze względu na wspólne elementy ($\mathbf{A}T$) występujące w szeregach. Równanie różnicowe (6.33) daje więc formułę rekurencyjną, którą można łatwo zaprogramować na komputerze, co pokazane będzie w dalszych punktach.

Stosując wzór rekurencyjny (6.33) do rozwiązania numerycznego równania różniczkowego (6.2), odpowiadający aproksymacji wymuszeń funkcjami przedziałami stałymi, musimy w pierwszej kolejności wygenerować macierze $\mathbf{F}$ i $\mathbf{G}_0$ określone wzorami (6.30) i (6.31). Blok funkcyjny generujący te macierze może mieć postać:

```
template <class Typ>
int    MacPom1(vector<vector<Typ> > &A,vector<vector<Typ> > &B,
                     vector<vector<Typ> > &F,vector<vector<Typ> > &G1,
                    Typ T, Typ eps, Typ epsw , int N, int W)
{
  int K,Blad ;
  Typ  S,S1,NormaAT,teta,MWA ;
  vector<vector<Typ> > AX,AY,AT,BX,BT  ;
  InicjacjaMacierzy(AT,N,N);   InicjacjaMacierzy(AX,N,N);
  InicjacjaMacierzy(BX,N,N);
  InicjacjaMacierzy(AY,N,N);     InicjacjaMacierzy(BT,N,W);
  try
    {
      AT=A*T;
      MacierzJednostkowa(AX)  ;
      MacierzJednostkowa(F)  ;   MacierzJednostkowa(BX)  ;
      NormaAT=NormaMacierzy(AT);
      K=0; S=1; S1=1;
      teta=NormaAT/(1-NormaAT);
      do
      {
          K++;
          AY=AX*AT  ;
          S/=K;  AX=AY*S; F=F+AX   ;
          S1/=K+1;  AX=AY*S1 ;
          BX=BX+AX ;
          AX=Kopiuj(AY);
          teta*=NormaAT/(K+1);
      } while (teta>=eps);
      MWA=MWWMacA(F,epsw,800) ;
      if (MWA>=1.05) return 16;
      BT=B*T;  G1=BX*BT   ;
      return 0;
    }
  catch(...)
   {
    PiszKomBladRozRozn(17);
    return 17;
   }
}
```

6.1.2. Wymuszenie aproksymowane funkcjami przedziałami liniowymi

Zakładamy, że wymuszenie $\mathbf{u}(t)$ jest funkcja ciągłą przedziałami liniową, taką, że:

$$\mathbf{u}(\tau) = \mathbf{u}(kT) + \frac{1}{T}\left[\mathbf{u}\left((k+1)T\right) - \mathbf{u}(kT)\right](\tau - kT) = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2\tau \tag{6.34}$$

dla

$$kT \le \tau < (k+1)T, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

gdzie:

$$\mathbf{C}_{i} = \frac{2^{i}}{T^{i+1}} \int_{0}^{T} e^{\mathbf{A}(T-\tau)} s^{i}\, ds \quad ; \quad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{T}\left[\mathbf{u}\left((k+1)T\right) - \mathbf{u}(kT)\right]. \tag{6.34a}$$

Wykonując w takim przypadku całkowanie przez części w równaniu różnicowym (6.18) z uwzględnieniem wzoru (6.8), otrzymujemy:

$$\int_{kT}^{(k+1)T} e^{\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau = -\mathbf{A}^{-1}e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\left(\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2\tau\right)\Big|_{kT}^{(k+1)T} + \int_{kT}^{(k+1)T}\mathbf{A}^{-1}e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{f}_2 d\tau =$$

$$= \mathbf{A}^{-1}e^{-\mathbf{A}kT}\left\{\left[\mathbf{B} + \mathbf{A}^{-1}\left(e^{-\mathbf{A}kT} - \mathbf{1}\right)\mathbf{B}\frac{1}{T}\right]\mathbf{u}(kT) + \right.$$

$$\left. + \left[e^{-\mathbf{A}T}\mathbf{B} - \mathbf{A}^{-1}\left(e^{-\mathbf{A}T} - \mathbf{1}\right)\mathbf{B}\frac{1}{T}\right]\mathbf{u}(k+1)T\right\}.$$

Gdy uwzględnimy powyższy wynik całkowania oraz oznaczenie (6.32), równanie różnicowe (6.18) przyjmie postać:

$$\mathbf{x}(k+1) = e^{\mathbf{A}T}\mathbf{x}(\mathbf{k}) + \mathbf{A}^{-1}\left[e^{\mathbf{A}T} - \left(e^{\mathbf{A}T} - \mathbf{1}\right)\mathbf{A}^{-1}\frac{1}{T}\right]\mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \tag{6.35}$$

$$+ \mathbf{A}^{-1}\left[\left(e^{\mathbf{A}T} - \mathbf{1}\right)\mathbf{A}^{-1}\frac{1}{T} - 1\right]\mathbf{B}\mathbf{u}(k+1).$$

Uwzględniając wzory (6.30) i (6.29), równanie rekurencyjne (6.35) możemy przekształcić do postaci:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}_1\mathbf{u}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k+1), \tag{6.36}$$

gdzie:

$$\mathbf{G}_1 = \mathbf{A}^{-1}\left[e^{\mathbf{A}T} - \left(e^{\mathbf{A}T} - \mathbf{1}\right) - \mathbf{A}^{-1}\frac{1}{T}\right]\mathbf{B} = \left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathbf{A}T)^n}{n!(n+2)}\right](\mathbf{B}\mathbf{T}), \tag{6.37}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{A}^{-1}\left[\left(e^{\mathbf{A}T} - \mathbf{1}\right)\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{1}\right]\mathbf{B} = \left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathbf{A}T)^n}{(n+2)!}\right](\mathbf{B}\mathbf{T}), \tag{6.38}$$

natomiast macierz $\mathbf{F}$ wyraża się wzorem (6.30).

Równanie rekurencyjne (6.36) daje więc algorytm wyznaczania rozwiązania równania różniczkowego w postaci (6.2). W obliczeniach komputerowych należy zauważyć, że wyznaczanie macierzy $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}_1$ i $\mathbf{H}$ zgodnie z wzorami (6.30), (6.37) i (6.38) należy prowadzić równolegle ze względu na wspólne elementy $(\mathbf{A}T)^n$ występujące w szeregach macierzowych tych wzorów, co minimalizuje liczbę operacji numerycznych. W przypadku stosowania wzoru rekurencyjnego (6.36) niezbędne jest wygenerowanie macierzy $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}_1$ i $\mathbf{H}$ (wzory (6.30), (6.37) i (6.38)), co można zrealizować w następującym bloku funkcyjnym:

```
//A ,B -macierze układu równań różniczkowych dX/dt = A*X + B*U
//N    - rząd macierzy A i F
//W    - liczba kolumn macierzy B , G2 , H
//T    - wybrany krok całkowania
//eps  - górna granica błędu przybliżenia macierzy F,G2,H
//epsw - błąd wyznaczenia największej co do modułu wartości
//       własnej macierzy F
template <class Typ>
int   MacPom2(vector<vector<Typ> > &A, vector<vector<Typ> > &B,vector<vector<Typ> >
&F,
                      vector<vector<Typ> > &G2, vector<vector<Typ> > &H ,
                     Typ T, Typ eps, Typ epsw ,int N, int W)
{
  int K,Blad ;
  Typ SS,S1,S2,NormaAT,teta,MWA,a=0.5 ;
  vector<vector<Typ> >  AX,AY,AT,AG,AH,BT;
  InicjacjaMacierzy(AT,N,N);   InicjacjaMacierzy(AX,N,N);
  InicjacjaMacierzy(AY,N,N);   InicjacjaMacierzy(AH,N,N);
  InicjacjaMacierzy(AG,N,N);   InicjacjaMacierzy(BT,N,W);
  try
  {
    AT=A*T;       MacierzJednostkowa(AX);
    NormaAT=NormaMacierzy(AT);
    K=0; SS=1; S1=0.5; S2=0.5;
    teta=NormaAT/(1-NormaAT);
    MacierzJednostkowa(F);
    AG=AX*a;  AH=AX*a;
    do
    {
          K++;
          AY=AX*AT ;
          SS/=K;
          AX=AY*SS; F=F+AX ;
          S1*=(K+1)/((K+2)*K);
          AX=AY*S1;  AG=AG+AX ;
          S2/=K+2;
          AX=AY*S2; AH=AH+AX;
          for (int i=0; i<=N; i++)
          for (int j=0; j<=N; j++) AX[i][j]=AY[i][j];
          teta*=NormaAT/(K+1) ;
     } while (teta>=eps);
     MWA=MWWMacA(F,epsw,800) ;
     if (MWA>=1.05)  return 16;
     BT=B*T;  G2=AG*BT;  H=AH*BT;
     return 0;
    }
  catch(...)
```

```
    {
      PiszKomBladRozRozn(19);
      return 19;
    }
}
```

6.1.3. Wymuszenie aproksymowane wielomianem stopnia drugiego

W tym przypadku dokonujemy we wzorze (6.18) zamiany zmiennych pod całką:

$$\tau = s + kT \quad \text{gdzie } 0 < s < T,$$

co daje:

$$\mathbf{x}\left[(k+1)T\right] = e^{\mathbf{A}T}\mathbf{x}(kT) + \int_0^T e^{\mathbf{A}(T-s)}\mathbf{B}\mathbf{u}(kT+s)ds\ . \tag{6.39}$$

W celu obliczenia całki we wzorze (6.39) należy interpolować $\mathbf{u}(kT+s)$ wielomianem drugiego stopnia:

$$\mathbf{u}(\mathrm{kT+s}) = \left(1 - \frac{3\mathrm{s}}{\mathrm{T}} + \frac{2\mathrm{s}^2}{\mathrm{T}^2}\right)\mathbf{u}(\mathrm{kT}) + \left(\frac{4\mathrm{s}}{\mathrm{T}} - \frac{4\mathrm{s}^2}{\mathrm{T}^2}\right)\mathbf{u}\left(\mathrm{kT} + \frac{\mathrm{T}}{2}\right) + \tag{6.40}$$
$$+ \left(-\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{T}} + \frac{2\mathrm{s}^2}{\mathrm{T}^2}\right)\mathbf{u}\left((\mathrm{k}+1)\mathrm{T}\right)$$

Podstawiając przybliżenie (6.40) pod całkę wzoru (6.39), otrzymujemy:

$$\int_0^{\mathrm{T}} e^{\mathbf{A}(\mathrm{T}-\mathrm{s})}\mathbf{B}\mathbf{u}(\mathrm{kT}+\mathrm{s})\mathrm{ds} = \left(\mathbf{C}_0 - \frac{3}{2}\mathbf{C}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{C}_2\right)(\mathbf{B}\mathrm{T})\mathbf{u}(\mathrm{kT}) + \tag{6.41}$$
$$+ \left(2\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2\right)(\mathbf{B}\mathrm{T})\mathbf{u}\left(\mathrm{kT} + \frac{\mathrm{T}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\mathbf{C}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{C}_2\right)(\mathbf{B}\mathrm{T})\mathbf{u}\left((\mathrm{k}+1)\mathrm{T}\right).$$

gdzie:

$$\mathbf{C}_i = \frac{2^i}{T^{i+1}}\int_0^T e^{\mathbf{A}(T-s)}s^i ds \quad \text{dla } i = 0,1,2. \tag{6.42}$$

Obliczając całkę (6.42) dla poszczególnych $i = 0, 1, 2$, otrzymujemy:

$$\mathbf{C}_0 = \left(e^{\mathbf{A}T} - \mathbf{1}\right)(\mathbf{A}T) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathbf{A}T)^n}{(n+1)!},$$

$$\mathbf{C}_1 = 2\left(e^{\mathbf{A}T} - \mathbf{1} - \mathbf{A}T\right)\left[(\mathbf{A}T)^{-1}\right]^2 = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathbf{A}T)^n}{(n+2)!}, \tag{6.43}$$

$$\mathbf{C}_2 = 8\left[e^{\mathbf{A}T} - \mathbf{1} - \mathbf{A}T - \frac{1}{2}(\mathbf{A}T)^2\right]\left[(\mathbf{A}T)^{-1}\right]^3 = 8\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathbf{A}T)^n}{(n+3)!}.$$

Gdy przyjmiemy oznaczenie (6.32) oraz uwzględnimy wynik całkowania (6.41), równanie rekurencyjne (6.39) przyjmuje postać:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}_2\mathbf{u}(k) + \mathbf{H}_2\mathbf{u}\left(k+\frac{1}{2}\right) + \mathbf{R}\mathbf{u}(k+1), \tag{6.44}$$

gdzie:

$$\mathbf{G}_2 = \left(\mathbf{C}_0 - \frac{3}{2}\mathbf{C}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{C}_2\right)(\mathbf{B}T), \tag{6.45}$$

$$\mathbf{H}_2 = (2\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2)(\mathbf{B}T), \tag{6.46}$$

$$\mathbf{R} = \left(-\frac{1}{2}\mathbf{C}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{C}_2\right)(\mathbf{B}T), \tag{6.47}$$

natomiast macierz **F** wyraża się wzorem (6.30).

Równanie rekurencyjne (6.44) daje algorytm wyznaczania rozwiązania równania różniczkowego (6.2) w postaci dyskretnej $\mathbf{x}(k)$ (k = 0, 1,…). W celu zminimalizowania operacji numerycznych należy zauważyć, że formowanie macierzy **F**, $\mathbf{G}_2$, $\mathbf{H}_2$, **R** należy prowadzić równolegle (wzory (6.30), (6.43), (6.45), (6.46), (6.47)) ze względu na wspólne elementy $(\mathbf{A}T)^n$ występujące w szeregach macierzowych tych wzorów. Zauważmy również, że jeżeli $\mathbf{x}(t)$ jest liczone co T, to $\mathbf{u}(t)$ musi być zadane co $\frac{1}{2}T$ sekund.

Stosując wzór rekurencyjny (6.44) odpowiadający aproksymacji wymuszeń wielomianem stopnia drugiego, musimy w pierwszej kolejności wygenerować macierze **F**, $\mathbf{G}_2$, $\mathbf{H}_2$, **R** (wzory (6.30), (6.45), (6.46) i (6.47)). Można tego dokonać w sposób pokazany w poniższym bloku funkcyjnym:

```
//N    - rząd macierzy A i F
//W    - liczba kolumn macierzy B,G,H,R
//T    - wybrany krok całkowania
//eps  - górna granica błędu przybliżenia macierzy F,G,H,R
//epsw - błąd wyznaczenia największej co do modułu
//       wartości własnej macierzy F
template <class Typ>
int   MacPom3(vector<vector<Typ> > &A, vector<vector<Typ> > &B, vector<vector<Typ>
> &F,
                      vector<vector<Typ> > &G, vector<vector<Typ> > &H,
                      vector<vector<Typ> > &R , Typ T, Typ eps, Typ epsw ,
                      int N, int W)
{
  int K,Blad ;
  Typ SS,S1,S2,S3,NormaAT,teta,MWA,a1 ;
  vector<vector<Typ> > AX,AY,AT,AG,AH,AR,BT ;
  InicjacjaMacierzy(AT,N,N);   InicjacjaMacierzy(AX,N,N);
  InicjacjaMacierzy(AY,N,N);   InicjacjaMacierzy(AH,N,N);
  InicjacjaMacierzy(AG,N,N);   InicjacjaMacierzy(AR,N,N);
  InicjacjaMacierzy(BT,N,W);
  try
  {
```

```
    AT=A*T;       MacierzJednostkowa(AX);
    NormaAT=NormaMacierzy(AT);
    K=0; SS=1; S1=1; S2=0.5; S3=1.0/6.0;
    teta=NormaAT/(1-NormaAT);
    MacierzJednostkowa(F);  AG=AX*S1;    AH=AX*S2;  AR=AX*S3;
    do
    {
          K++;
          AY=AX*AT;   SS/=K;
          AX=AY*SS;  F=F+AX;   S1=SS/(K+1);
          AX=AY*S1;    AG=AG+AX;  S2=S1/(K+2);
          AX=AY*S2;  AH=AH+AX;    S3=S2/(K+3);
          AX=AY*S3;  AR=AR+AX;
          for (int i=0; i<=N; i++)
          for (int j=0; j<=N; j++) AX[i][j]=AY[i][j];
          teta*=NormaAT/(K+1) ;
    }
    while (teta>=eps);
    MWA=MWWMacA(F,epsw,800) ;
    if (MWA>=1.05)  return 16;
    a1=-3.0;  AX=AH*a1;
    a1=4.0;   AY=AR*a1;
    AG=AG+AX;  AG=AG+AY;
    a1=4.0;   AX=AH*a1;
    a1=-8.0;  AY=AR*a1;
    for (int i=0; i<=N; i++)
      for (int j=0; j<=N; j++) AT[i][j]=AH[i][j];
    AH=AX+AY;
    a1=-1.0;  AX=AT*a1;
    a1=4.0;   AY=AR*a1;
    AR=AX+AY;              BT=B*T;
    G=AG*BT;   H=AH*BT;  R=AR*BT;
    return 0;
  }
  catch(...)
   {
     PiszKomBladRozRozn(21);
     return 21;
   }
}
```

6.1.4. Dobór kroku całkowania *T* ze względu na dobór górnej granicy błędu obliczania macierzy e^{AT} oraz ze względu na numeryczną stabilność rozwiązania

W punktach 6.1.1, 6.1.2, 6.1.3 podano metody zastępowania równania stanu (6.2) przybliżonymi równaniami różnicowymi. W równaniach tych pojawiają się macierze dane w postaci szeregów:

$$\mathbf{S} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{A}T)^n}{n! s_n} \quad \text{gdzie} \quad s_n \geq 1 \quad \text{dla} \quad n > 2 \tag{6.48}$$

(patrz wzory (6.30), (6.31), (6.37), (6.38), (6.45), (6.46), (6.47)). W obliczeniach przybliżamy **S**, biorąc skończoną liczbę składników rozwinięcia (6.48)

$$\mathbf{S} \cong \sum_{n=0}^{K} \frac{(\mathbf{A}T)^n}{n!s_n} = \mathbf{M} = \left[m_{ij}\right] \tag{6.49}$$

Macierz błędu wynosi wówczas

$$\mathbf{R} = \sum_{n=K+1}^{\infty} \frac{(\mathbf{A}T)^n}{n!s_n} = \left[r_{ij}\right] \tag{6.50}$$

Niech $\|\mathbf{A}\|$ oznacza jedną z następujących norm macierzy kwadratowej **A** stopnia *N*:

$$\|\mathbf{A}\| = \max_i \sum_{j=1}^{N} |a_{ij}| \tag{6.51}$$

lub

$$\|\mathbf{A}\| = \max_j \sum_{i=1}^{N} |a_{ij}| \tag{6.52}$$

Zgodnie z definicjami (6.51) lub (6.52) dla macierzy **R** zachodzi

$$|r_{ij}| \le \|\mathbf{R}\| \tag{6.53}$$

dla wszystkich *i*, *j*. Ponadto zachodzi [7]:

$$\|\mathbf{AB}\| \le \|\mathbf{A}\| \le \|\mathbf{B}\| . \tag{6.54}$$

Uwzględniając nierówności (6.53), (6.54) oraz równania (6.50), otrzymujemy (por. [7])

$$\begin{aligned} |r_{ij}| &\le \sum_{n=K+1}^{\infty} \frac{\mathbf{1}}{n!s_n} |\textit{element } (i, j) \textit{ w macierzy } (\mathbf{A}T)^n| \le \\ &\le \sum_{n=K+1}^{\infty} \frac{\mathbf{1}}{n!s_n} \|\mathbf{A}T\|^n \le \frac{\|\mathbf{A}T\|^{K+1}}{(K+1)!S_{K+1}} \left[1 + \|\mathbf{A}T\| + \|\mathbf{A}T\|^2 + \ldots\right]. \end{aligned} \tag{6.55}$$

Jeżeli krok całkowania *T* jest tak dobrany, że $\|\mathbf{A}T\| < 1$, to szereg w nierówności (6.55) jest zbieżny, co daje:

$$|r_{ij}| \le \frac{\|\mathbf{A}T\|^{K+1}}{(K+1)!S_{K+1}} \frac{1}{1-\|\mathbf{A}T\|} = \varepsilon . \tag{6.56}$$

Nierówność (6.56) daje górną granicę błędu elementów macierzy **M** (6.49) używanej jako przybliżenie macierzy **S** (6.48). Dla danego obcięcia **K** sumy szeregów typu (6.48) otrzymuje się największy błąd (6.56) dla przypadku gdy $s_n = 1$ ($n = 0, 1,\ldots$), co odpowiada macierzy $\mathbf{F} = e^{\mathbf{A}T}$ (wzór (6.30)). Ponieważ macierz ta występuje w konstrukcji wszystkich trzech rozpatrywanych algorytmów (6.33), (6.36), (6.44), jako kryterium błędu formowania macierzy występujących w tych algorytmach można przyjąć górny błąd obcięcia w postaci (por. [9]):

$$\varepsilon = \frac{\left\|\mathbf{A}T\right\|^{K+1}}{(K+1)!}\,\frac{1}{1-\left\|\mathbf{A}T\right\|}. \tag{6.57}$$

Przy zadanym ε wzór (6.57) może posłużyć do wyznaczania kroku całkowania T. Jak pokazano we wstępie, struktura rozwiązania równania (6.2) zależy od wartości własnych macierzy **A**. Wykazuje się, że w celu zagwarantowania stabilności numerycznej, krok czasowy całkowania T i liczba wyrazów $K + 1$ w rozwinięciu (6.49) muszą być tak dobrane, ażeby największa co do modułu wartość własna macierzy **M** (wzór (6.49)) była mniejsza od jedności. Warunki powyższe będą sprawdzane w procedurach obliczeniowych podanych niżej.