

**GRAŻYNA CZENSKOWSKA**

**NOWA MATURA  
Z MATEMATYKI  
Od 2023 r.  
ZAKRES PODSTAWOWY**

**NOWA MATURA  
Z MATEMATYKI  
Od 2023 r.  
ZAKRES PODSTAWOWY**

©Copyright by Grażyna Czenskowska

Autor: Grażyna Czenskowska

Tytuł: Nowa matura z matematyki od 2023 r. Zakres podstawowy

Okładka: Grażyna Czenskowska

Kontakt: [graczen@wp.pl](mailto:graczen@wp.pl)

*ISBN: 978-83-962950-1-9*

Wydanie I

Warszawa 2021

Niniejsza publikacja, ani żadna jej część nie może być kopiowana, ani w jakikolwiek inny sposób reprodukowana, powielana, ani odczytywana w środkach publicznego przekazu bez pisemnej zgody wydawcy. Wykonywanie kopii metodą kserograficzną, fotograficzną, a także kopiowanie książki na nośniku filmowym, magnetycznym lub innym powoduje naruszenie praw autorskich niniejszej publikacji.

Wszelkie prawa zastrzeżone.

**All rights reserved**

**SPIS TREŚCI**

## ROZDZIAŁ 1. Liczby rzeczywiste str. 8

1. Zbiór liczb rzeczywistych i jego podzbiory
2. Pierwiastki
3. Potęgi
4. Logarytmy
5. Procenty
6. Lokaty bankowe
7. Wartość bezwzględna
8. Błąd względny i bezwzględny

## ZADANIA

## ROZDZIAŁ 2. Wyrażenia algebraiczne str. 24

1. Wzory skróconego mnożenia
2. Przekształcanie wyrażeń algebraicznych
3. Dowody algebraiczne

## ZADANIA

## ROZDZIAŁ 3. Równania , nierówności i układy równań str. 31

## RÓWNANIA

1. Równanie liniowe
2. Równanie kwadratowe
3. Równanie wielomianowe w postaci iloczynowej
4. Równanie wielomianowe w postaci ogólnej
5. Proporcja
6. Równanie z wartością bezwzględną
7. Równanie z niewiadomą pomocniczą

## NIERÓWNOŚCI

8. Nierówności liniowe
9. Nierówności kwadratowe
10. Nierówności z wartością bezwzględną

## UKŁADY RÓWNAŃ

11. Układy równań liniowych. Metoda podstawiania i metoda przeciwnych współczynników
12. Układ równań pierwszego i drugiego stopnia

## ZADANIA

## ROZDZIAŁ 4. Funkcje str. 50

1. Definicja i własności funkcji
2. Przekształcanie wykresu funkcji
3. Funkcja liniowa
4. Funkcja kwadratowa
5. Wielomiany
6. Proporcjonalność odwrotna. Funkcja wymierna
7. Funkcja wykładnicza
8. Funkcja logarytmiczna

## ZADANIA

## ROZDZIAŁ 5. Ciągi str. 80

1. Definicja i własności ciągów.
2. Wzór ogólny i wzór rekurencyjny
3. Ciąg arytmetyczny
4. Ciąg geometryczny

## ZADANIA

## ROZDZIAŁ 6. Trygonometria str. 89

1. Funkcje trygonometryczne kąta ostrego
2. Funkcje trygonometryczne kąta wypukłego
3. Tożsamości trygonometryczne
4. Wzory redukcyjne

## ZADANIA

## ROZDZIAŁ 7. Planimetria str. 97

1. Trójkąty – wzory, własności, twierdzenia
2. Czworokąty
3. Okręgi i koła
4. Wielokąty
5. Prosta i okrąg

## ZADANIA

## ROZDZIAŁ 8. Geometria analityczna str. 120

1. Punkty w układzie współrzędnych
2. Proste w postaci kierunkowej i postaci ogólnej
3. Okrąg

## ZADANIA

## ROZDZIAŁ 9. Stereometria str. 130

1. Graniastosłupy
2. Kąty w graniastosłupie
3. Ostrosłupy
4. Kąty w ostrosłupie
5. Wielościany foremne
6. Bryły obrotowe: walec, stożek, kula

## ZADANIA

## ROZDZIAŁ 10. Statystyka str. 143

1. Średnia arytmetyczna
2. Średnia ważona
3. Mediana
4. Dominanta
5. Skala centylowa
6. Wariancja
7. Odchylenie standardowe
8. Wartość oczekiwana wygranej

## ZADANIA

## ROZDZIAŁ 11. Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa str. 149

1. Zasada mnożenia
2. Zasada dodawania
3. Liczby wielocyfrowe
4. Prawdopodobieństwo klasyczne
5. Własności prawdopodobieństwa

## ZADANIA

## ROZDZIAŁ 12. Optymalizacja str. 157

1. Największa i najmniejsza wartość funkcji kwadratowej w przedziale zamkniętym

## ZADANIA

## ODPOWIEDZI str. 159

# ROZDZIAŁ 1

## LICZBY RZECZYWISTE

### 1. Zbiór liczb rzeczywistych i jego podzbiory

Liczby rzeczywiste oznaczamy symbolem  $R$

$R_+$  – liczby rzeczywiste dodatnie

$R_-$  – liczby rzeczywiste ujemne

$R_+ \cup \{0\}$  – liczby nieujemne ( $x \geq 0$ )

$R_- \cup \{0\}$  – liczby niedodatnie ( $x \leq 0$ )

$Q$  lub  $W$  – liczby wymierne, czyli takie, które można przedstawić w postaci ułamka zwykłego

$IQ$  lub  $nW$  – liczby niewymierne

$C$  lub  $Z$  – liczby całkowite

$N$  – liczby naturalne

$N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

$N_+$  – liczby naturalne dodatnie

$N_+ = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

### 2. Pierwiastki

Podstawowe wzory:

1. Każdy pierwiastek można zapisać w postaci potęgi

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

$$(\sqrt[n]{a})^k = a^{\frac{k}{n}}$$

$$np. \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}, \quad \sqrt[3]{4} = 4^{\frac{1}{3}}, \quad \sqrt[5]{3} = 3^{\frac{1}{5}}, \quad \sqrt[3]{2^5} = 2^{\frac{5}{3}}$$

2. Jeżeli mnożymy pierwiastki tego samego stopnia, to możemy pomnożyć liczby pod pierwiastkiem

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

$$np. \sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{32}) = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{64} = 2 + 8 = 10$$

3. Jeżeli dzielimy pierwiastki tego samego stopnia, to możemy podzielić liczby pod pierwiastkiem

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b}$$

$$np. \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{50}{2}} = \sqrt{25} = 5$$

4. Jeżeli pierwiastek podnosimy do potęgi, to możemy podnieść do potęgi liczbę pod pierwiastkiem

$$(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k} = a^{\frac{k}{n}}$$

$$np. (\sqrt[6]{8})^2 = \sqrt[6]{8^2} = \sqrt[6]{64} = 2$$

5. Jeżeli pierwiastek stopnia n podnosimy do potęgi n, to otrzymujemy liczbę która była pod pierwiastkiem

$$(\sqrt[n]{a})^n = a$$

$$np. \sqrt{a^2} = a, \quad \sqrt[3]{a^3} = a, \dots$$

6. Ważna własność

$$\sqrt{x^2} = |x|, \quad (\sqrt{x})^2 = x$$

7. Mnożąc wyrażenia mieszane (liczby i pierwiastki) mnożymy najpierw liczby, a potem pierwiastki

$$\text{np. } 4\sqrt{3} \cdot 5\sqrt{2} = 4 \cdot 5 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = 20\sqrt{6}$$

8. Usuwanie niewymierności z mianownika.

$$\text{np. } \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

9. Jeżeli w mianowniku jest suma lub różnica to licznik i mianownik mnożymy przez wyrażenie sprzężone. To znaczy jak był  $(-)$  to mnożymy przez wyrażenie z  $(+)$ , a jak był  $(+)$  to mnożymy przez wyrażenie z  $(-)$ .

$$\frac{2}{2-\sqrt{3}} = \frac{2}{2-\sqrt{3}} \cdot \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{2(2+\sqrt{3})}{2^2-\sqrt{3}^2} = \frac{2(2+\sqrt{3})}{4-3} = \frac{2(2+\sqrt{3})}{1} = 2(2+\sqrt{3})$$

10. Wyłączanie liczby spod pierwiastka

$$\text{np. } \sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

11. Włączanie liczby pod pierwiastek

$$\text{np. } 2\sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 6} = \sqrt[3]{8 \cdot 6} = \sqrt[3]{48}$$

### 3. Potęgi

$a^n$  – potęga o podstawie  $a$  i wykładniku  $n$

$a$  - podstawa potęgi

$n$  - wykładnik potęgi

#### Podstawowe wzory:

Przy ujemnym wykładniku odwracamy liczbę, którą potęgujemy, a minus przy wykładniku znika

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$



Przy wykładniku ułamkowym stosujemy pierwiastki. Stopień pierwiastka to mianownik wykładnika potęgi

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$$

$$a^n \cdot a^k = a^{n+k}$$

$$\frac{a^n}{a^k} = a^{n-k}$$

$$(a^n)^k = a^{n \cdot k}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n \quad \wedge \quad a \neq 0$$

$$a^0 = 1$$

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

$$a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k}$$

### PRZYKŁADY

a) Oblicz:

$$3^{-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}, \quad \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} = 4^1 = 4$$

$$\left(1\frac{1}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

b) Zapisz wyrażenie w postaci jednej potęgi

$$\frac{5^8 2^{10}}{100^4} = \frac{5^8 2^{10}}{25^4 4^4} = \frac{5^8 2^{10}}{5^8 2^8} = 2^2$$

#### 4. Logarytm

$\log_a b$  – logarytm przy podstawie  $a$  z liczby  $b$

Definicja:

Logarytmem przy podstawie  $a$  z liczby  $b$  nazywamy wykładnik potęgi  $c$  do której należy podnieść  $a$ , żeby otrzymać  $b$

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

$$a > 0, b > 0, a \neq 1$$

Np. liczbę 2 należy podnieść do potęgi trzeciej, żeby otrzymać 8 czyli  $\log_2 8 = 3$ ,

a . liczbę 3 należy podnieść do potęgi czwartej, żeby otrzymać 81 więc  $\log_3 81 = 4$

#### WŁASNOŚCI LOGARYTMÓW

$$\log_a x, \log_a y \text{ dla } a > 0, x, y > 0, a \neq 1$$

**WŁ1.** Jeżeli dodajemy logarytmy o takich samych podstawach, to mnożymy liczby logarytmowane

$$\log_a x + \log_a y = \log_a (x \cdot y)$$



Grażyna Czerniewska – z wykształcenia matematyk przez wiele lat pracowała w renomowanych warszawskich liceach: VIII LO im. Władysława IV, XXXV LO im. Bolesława Prusa, NLO 81 SGH.

Swoje doświadczenie w pracy z uczniami wykorzystuje pisząc książki z dziedziny matematyki. Autorka serii pt.: „Przed klasówką i maturą z matematyki” oraz „Matura podstawowa z matematyki 2022, 2023....”

Najnowsza książka pt. „Nowa matura z matematyki od r. 2023. Zakres podstawowy” jest kursem przygotowawczym do obowiązkowej matury z matematyki według nowej formuły 2023.

Publikacja jest zgodna z zaleceniami Centralnej Komisji Egzaminacyjnej. Zawiera teorię, przykładowe zadania z rozwiązaniami i wyjaśnieniami, nowe typy zadań i ponad 240 zadań do samodzielnego rozwiązania. Do wszystkich zadań podane są odpowiedzi.

„Nowa matura z matematyki od r. 2023. Zakres podstawowy” to pełny kurs do matury podstawowej. Zawiera wszystkie zagadnienia podane w Informatorze o egzaminie maturalnym 2023.

Jest to doskonała pomoc w przygotowaniu się do nowej matury.

**Książka zawiera:**

**Wiedzę teoretyczną**

**Przykłady z rozwiązaniami i wyjaśnieniami**

**Nowe typy zadań**

**Zadania do samodzielnego rozwiązania**

**Odpowiedzi do wszystkich zadań**