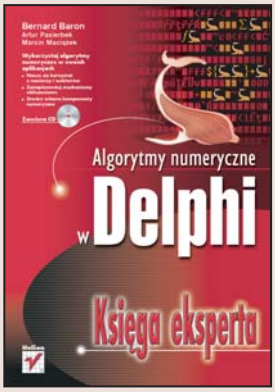
Algorytmy numeryczne w Delphi. Księga eksperta



Autorzy: Bernard Baron,
Artur Pasierbek, Marcin Maciążek
ISBN: 83-7361-951-8
Format: B5, stron: 544

Metody numeryczne są to sposoby rozwiązywania złożonych problemów matematycznych za pomocą narzędzi obliczeniowych udostępnianych przez popularne języki programowania. Jeden z najpopularniejszych języków – Pascal, będący podstawą języka ObjectPascal wykorzystywanego w Delphi, pozwala na bardzo łatwą implementację mechanizmów obliczeń numerycznych. Specyfika projektowania aplikacji w środowisku Delphi pozwala na utworzenie komponentów realizujących algorytmy numeryczne i stosowanie ich w wielu aplikacjach.

Książka „Algorytmy numeryczne w Delphi. Księga eksperta" przedstawia najczęściej wykorzystywane metody numeryczne wraz z przykładami ich implementacji w języku ObjectPascal. Każde zagadnienie jest omówione zarówno od strony teoretycznej, jak i praktycznej, co ułatwia jego zrozumienie i pozwala na modyfikacje zamieszczonych w książce kodów źródłowych.

- Typy, funkcje, klasy i procedury wykorzystywane w algorytmach numerycznych
- Algebra macierzy i równania liniowe
- Badanie funkcji
- Rozwiązywanie równań nieliniowych i wyznaczanie wartości własnych macierzy
- Układy równań różniczkowych liniowych i nieliniowych
- Przekształcenia Fouriera i Laplace'a

Niemal każdy problem obliczeniowy można rozwiązać za pomocą metod numerycznych. Nie musisz więc wymyślać ponownie koła – wystarczy, że poznasz opisane w tej książce algorytmy.

Wydawnictwo Helion
ul. Chopina 6
44-100 Gliwice
tel. (32)230-98-63
e-mail: helion@helion.pl

Spis treści

Rozdział 6.

Układy równań różniczkowych liniowych o stałych współczynnikach

Zadany jest układ N równań różniczkowych liniowych niejednorodnych:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j(t) + \sum_{j=1}^{W} b_{ij}\, u_j(t) \qquad (i = 1, 2, ..., N), \tag{6.1}$$

gdzie współczynniki a_{ij} oraz b_{ij} są rzeczywiste. Układ ten można zapisać w postaci macierzowej:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)\,, \tag{6.2}$$

gdzie:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ . \\ . \\ . \\ x_N(t) \end{bmatrix}; \tag{6.2a}$$

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} \\ . \\ . \\ . \\ \frac{dx_N(t)}{dt} \end{bmatrix}; \tag{6.2b}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1N} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2N} \\ \ldots\ldots \\ a_{N1}a_{N2}\ldots a_{NN} \end{bmatrix}; \tag{6.2c}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11}b_{12}\ldots b_{1W} \\ b_{21}b_{22}\ldots b_{2W} \\ \ldots\ldots \\ b_{N1}b_{N2}\ldots b_{NW} \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ . \\ . \\ . \\ u_w(t) \end{bmatrix}. \tag{6.2d}$$

Na człony niejednorodne układu (6.1) składa się W wymuszeń $u_j(t)$ (j = 1, 2, ..., W) występujących ze współczynnikami b_{ij} macierzy prostokątnej **B**. W teorii równania (6.2) centralną rolę odgrywa funkcja wykładnicza $e^{\mathbf{A}t}$ macierzy kwadratowej **A** przemnożonej przez zmienną niezależną t, zdefiniowaną szeregiem macierzowym [7]:

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{1} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}(\mathbf{A}t)^2 + \ldots + \frac{1}{k!}(\mathbf{A}t)^k + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mathbf{A}t)^k}{k!}. \tag{6.3}$$

Szereg macierzowy (6.3) jest równoważny N^2 zwykłym skalarnym szeregom potęgowym:

$$\delta_{ij} + (\mathbf{A}t)_{ij} + \frac{1}{2!}\left\{(\mathbf{A}t)^2\right\}_{ij} + \ldots + \frac{1}{k!}\left\{(\mathbf{A}t)^k\right\}_{ij} + \ldots, \qquad (i, j = 1, 2, ..., N).$$

Do zrozumienia konstrukcji całki ogólnej równania (6.2) niezbędne będą następujące własności funkcji wykładniczej $e^{\mathbf{A}t}$:

1. Jeżeli $t = 0$, to zgodnie z definicją (6.3)

$$e^{\mathbf{A}0} = \mathbf{1} \text{ (macierz jednostkowa } N{\cdot}N\text{-wymiarowa).} \tag{6.4}$$

2. Jeżeli macierz **A** komutuje z macierzą **B**, a więc **AB** = **BA**, to:

$$e^{\mathbf{A}t}.e^{\mathbf{B}t} = e^{(\mathbf{A}+\mathbf{B})t}. \tag{6.5}$$

3. Ponieważ na mocy własności (6.5) $e^{\mathbf{A}t}\, e^{-\mathbf{A}t} = e^{(\mathbf{A}-\mathbf{A})t} = \mathbf{1}$, więc macierz odwrotna macierzy $e^{\mathbf{A}t}$ ma postać:

$$\left[e^{\mathbf{A}t}\right]^{-1} = e^{-\mathbf{A}t}. \tag{6.6}$$

4. Różniczkując obie strony równania macierzowego (6.3) ze względu na t oraz wyłączając wspólny czynnik **A** z wyrazów szeregu nieskończonego, otrzymuje się:

$$\frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{A}. \tag{6.7}$$

5. Mnożąc lewostronnie lub prawostronnie równanie macierzowe (6.7) przez $\mathbf{A}^{-1}$ (macierz odwrotna macierzy **A**), a następnie całkując tak otrzymywane równania ze względu na t od t_1 do t_2, otrzymuje się:

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{\mathbf{A}t}\,dt = \mathbf{A}^{-1}\left(e^{\mathbf{A}t_2} - e^{\mathbf{A}t_1}\right) = \left(e^{\mathbf{A}t_2} - e^{\mathbf{A}t_1}\right)\mathbf{A}^{-1}. \tag{6.8}$$

Do rozwiązania układu równań różniczkowych liniowych (6.2) można zastosować metodę uzmiennienia stałych. W tym celu najpierw rozpatruje się przypadek, gdy $\mathbf{u}(t) \equiv 0$, co oznacza, że równanie (6.2) jest jednorodne

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t). \tag{6.9}$$

Łatwo wykazać, że całka ogólna równania jednorodnego (6.9) ma postać:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{y}, \tag{6.10}$$

gdzie $\mathbf{y}$ jest wektorem N-wymiarowym o składowych stałych.

Istotnie z własności (6.7) wynika

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(e^{\mathbf{A}t}y(\mathbf{t})\right) = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}y = \mathbf{A}x(t). \tag{6.11}$$

Zgodnie z metodą uzmiennienia stałych przyjmuje się dalej, że wektor $\mathbf{y}$ jest funkcją zmiennej t, co daje:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{y}(t), \tag{6.12}$$

a następnie podstawia się wyrażenie (6.12) do równania niejednorodnego (6.2), uwzględniając własność (6.7)

$$\mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{y}(t) + e^{\mathbf{A}t}\frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{y}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t). \tag{6.13}$$

Upraszczając równanie (6.13) o człon $\mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{y}(t)$ oraz mnożąc je lewostronnie przez macierz $e^{\mathbf{A}t}$, otrzymuje się na mocy własności (6.6)

$$\frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} = e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{B}\mathbf{u}(t). \tag{6.14}$$

Całkując równanie (6.14) ze względu na t od t_0 do t, otrzymuje się:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau. \tag{6.15}$$

Jeżeli zadany jest wektor wartości początkowych $\mathbf{x}(t_0)$, to odpowiadający mu wektor $\mathbf{y}(t_0)$ można wyznaczyć z równania (6.12), stosując własność (6.6):

$$\mathbf{y}(t_0) = e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}(t_0). \tag{6.16}$$

Uwzględniając równanie (6.15) wraz z podstawieniem (6.16) w równaniu (6.12), otrzymuje się następujące rozwiązanie równania (6.2):

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0) + e^{\mathbf{A}t}\int_{t_0}^{t} e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \,. \tag{6.17}$$

Równanie (6.17) nie nadaje się do bezpośredniego obliczenia numerycznego. Rozwiązanie dokładne (6.17) równania (6.2) można jednak wykorzystać w metodzie krokowej, zastępując to równanie równaniem różnicowym, przyjmując $t_0 = kT$ i $t = (k+1)T$:

$$\mathbf{x}\left[(k+1)T\right] = e^{\mathbf{A}T}\mathbf{x}(kT) + e^{\mathbf{A}(k+1)T}\int_{kT}^{(k+1)T} e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \,. \tag{6.18}$$

W obliczaniu całek (6.18) mogą wystąpić trudności związane z występowaniem ujemnych i dużych co do modułu wartości własnych macierzy **A**. Ze względu na możliwość takiego przypadku należy aproksymować funkcję wektorową wymuszającą **u**(*t*), nie zmieniając jądra $e^{\mathbf{A}t}$ w całce równania (6.18).

Niech zachodzi przypadek ogólny, dla którego macierz **A** ma dzielniki elementarne:

$$(\lambda-\lambda_1)^{p_1}, (\lambda-\lambda_2)^{p_2}, \ldots, (\lambda-\lambda_S)^{p_S} \,,$$

gdzie wśród wartości własnych $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ macierzy **A** będących, zgodnie z definicją, zerami wielomianu charakterystycznego macierzy **A**

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) = 0 \,,$$

mogą być liczby jednakowe; $1 \le p_n \le N$, przy czym $p_1+p_2+\ldots+p_S = M$. Dowodzi się, że w takim przypadku istnieje taka macierz nieosobliwa **S**, że

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}^{-1}\,\mathbf{C}\mathbf{S}, \tag{6.19}$$

gdzie macierz **C** jest macierzą quasi-diagonalną, zwaną kanoniczną macierzą Jordana [30].

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{p1}(\lambda_1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_{p2}(\lambda_2) & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots & \mathbf{I}_{ps}(\lambda_s) \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{I}_{pi}(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_i & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_i & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & \lambda_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \lambda_i \end{bmatrix}. \tag{6.20}$$

Stosując transformację (6.19), funkcję wykładniczą $e^{\mathbf{A}t}$ można przekształcić następująco:

$$e^{\mathbf{A}t} = e^{(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{S})t} = e^{\mathbf{S}^{-1}(\mathbf{C}t)\mathbf{S}} = \mathbf{S}^{-1}e^{\mathbf{C}t}\mathbf{S}\,. \tag{6.21}$$

Ponieważ macierz **C** jest quasi-diagonalna, to:

$$e^{\mathbf{C}t} = \begin{bmatrix} e^{\mathbf{I}_{p1}(\lambda_1)t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\mathbf{I}_{p2}(\lambda_2)t} & 0 \\ . & . & . \\ 0 & 0 & e^{\mathbf{I}_{ps}(\lambda_s)t} \end{bmatrix}. \tag{6.22}$$

Zgodnie z definicją macierzowej funkcji wykładniczej oraz macierzy (6.20) zachodzi [30]:

$$e^{\mathbf{I}_{pi}(\lambda_i)t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_i t} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ te^{\lambda_i t} & e^{\lambda_i t} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{t^2}{2!}e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} & e^{\lambda_i t} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{t^{p_i-1}}{(p_i-1)!}e^{\lambda_i t} & \frac{t^{p_i-2}}{(p_i-2)!}e^{\lambda_i t} & \frac{t^{p_i-3}}{(p_i-3)!}e^{\lambda_i t} & \dots & e^{\lambda_i t} \end{bmatrix}. \tag{6.23}$$

Wzory (6.17), (6.21) i (6.22) określają strukturę rozwiązania równania różniczkowego (6.2), a w szczególności jego związek z wartościami własnymi λ_i występującymi w kombinacjach funkcji $e^{\lambda_i t}$ przemnożonych przez wielomiany $P_i(t)$ stopnia nie większego niż p_i–1, gdzie p_i jest stopniem dzielnika elementarnego odpowiadającego wartości własnej λ_i, tj. $P_i(t)e^{\lambda_i t}$. Załóżmy w ogólnym przypadku, że wartości własne λ_i macierzy **A** są zespolone

$$\lambda_i = \alpha_i + j\beta_i \qquad (i = 1, 2, ..., N). \tag{6.24}$$

Jeżeli $\mathrm{Re}\{\lambda_i\} = \alpha_i > 0$, to odpowiednie składniki rozwiązania $P_i(t)$ wzrastają wykładniczo z członem wielomianowym $P_i(t)$, gdy czas t wzrasta. Jeżeli $\alpha_i < 0$, to odpowiednie składniki rozwiązania $P_i(t)e^{\lambda_i t}$ maleją, gdy czas t wzrasta.

W każdym przypadku, jeśli $\mathrm{Im}\{\lambda_i\} = \beta_i \neq 0$, to — jak wiadomo — λ_i tworzy zespoloną parę sprzężoną z odpowiednią wartością własną λ_i^*, co odpowiada składnikowi rozwiązania sinusoidalnemu z wagą wykładniczą $e^{\lambda_i t}$ i wielomianową $P_i(t)$:

$$P_i(t)e^{\alpha_i t}\sin\beta_i t\,. \tag{6.25}$$

6.1. Równania różnicowe dla różnych aproksymacji funkcji wymuszających

Do numerycznego rozwiązania układu równań różniczkowych liniowych (6.2) można wykorzystać równanie różnicowe (6.18), przyjmując różną aproksymację funkcji wymuszającej $\mathbf{u}(t)$. W niniejszym opracowaniu podane będą konstrukcje tych algorytmów dla trzech przypadków, a mianowicie dla aproksymacji funkcji wymuszającej w postaci funkcji przedziałami stałej, liniowej i kwadratowej.

6.1.1. Wymuszenie aproksymowane funkcjami przedziałami stałymi

Niech wymuszenie wektorowe $\mathbf{u}(t)$ jest dane w postaci funkcji przedziałami stałej takiej, że:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(kT) \qquad \text{dla } kT \le t \le (k+1)T,\ k = 0, 1, 2, \ldots \tag{6.26}$$

W takim przypadku, wykonując całkowanie w równaniu różnicowym (6.18) z uwzględnieniem wzoru (6.8), otrzymuje się [7]:

$$\int_{kT}^{(k+1)T} e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau = -e^{-\mathbf{A}\tau}\Big|_{kT}^{(k+1)T}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(kT) = \left(-e^{-\mathbf{A}(k+1)T} + e^{-\mathbf{A}kT}\right)\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(kT) \tag{6.27}$$

Po umieszczeniu powyższego wyniku całkowania w równaniu (6.18) otrzymuje się:

$$\mathbf{x}[(k+1)T] = e^{\mathbf{A}T}\mathbf{x}(kT) + e^{\mathbf{A}(k+1)T}\left(-e^{-\mathbf{A}(k+1)T} + e^{-\mathbf{A}kT}\right)\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(kT) = e^{\mathbf{A}T}\mathbf{x}(kT) + \left(e^{\mathbf{A}T} - \mathbf{1}\right)\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(kT) \tag{6.28}$$

gdzie: $\mathbf{1}$ — macierz jednostkowa.

W równaniu różnicowym (6.28) celowym jest, ze względu na minimum operacji numerycznych, obliczać macierz $(e^{\mathbf{A}T}-\mathbf{1})\mathbf{A}^{-1}$, nie wykonując pomocniczych obliczeń macierzy $e^{\mathbf{A}T}$ oraz $\mathbf{A}^{-1}$, lecz wykorzystując równość:

$$\left(e^{\mathbf{A}T} - 1\right)\mathbf{A}^{-1} = T\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathbf{A}T)^n}{(n+1)!} \tag{6.29}$$

wynikającą z definicji (6.3).

Zatem po uwzględnieniu równania (6.29) oraz oznaczenia macierzy:

$$\mathbf{F} = e^{\mathbf{A}t} = T\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathbf{A}T)^n}{n!} \tag{6.30}$$

$$\mathbf{G}_0 = \left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathbf{A}T)^n}{(n+1)!}\right]\mathbf{B}T \tag{6.31}$$

i wektorów

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}(kT); \qquad \mathbf{u}(k) = \mathbf{u}(kT) \tag{6.32}$$

formuła rekurencyjna (6.28) przyjmie postać:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}_0\mathbf{u}(k). \tag{6.33}$$

Nie istnieje więc potrzeba obliczania macierzy odwrotnej $\mathbf{A}^{-1}$, jak by to wynikało z równania (6.28). Mając na uwadze dalszą minimalizację operacji numerycznych, należy zauważyć, że formowanie macierzy $\mathbf{F}$ i $\mathbf{G}_0$ (wzory (6.30) i (6.31)) należy prowadzić równolegle ze względu na wspólne elementy ($\mathbf{A}T$) występujące w szeregach. Równanie różnicowe (6.33) daje więc formułę rekurencyjną, którą można łatwo zaprogramować na komputerze, co pokazane będzie w dalszych punktach.

Stosując wzór rekurencyjny (6.33) do rozwiązania numerycznego równania różniczkowego (6.2), odpowiadający aproksymacji wymuszeń funkcjami przedziałami stałymi, należy w pierwszej kolejności wygenerować macierze $\mathbf{F}$ i $\mathbf{G}_0$, określone wzorami (6.30) i (6.31). Blok funkcyjny generujący te macierze może mieć postać:

```
function FmTemp1(var A, B, F, G1: TMatrixF; T, eps, EpsR: TFloat;
  N, W: Integer): Integer;
  // Formowanie macierzy pomocniczych F, G1:
  // A, B — macierze układu równań różniczkowych
  //   dX/dt = A*X+B*U,
  // N — rząd macierzy A,
  // W — liczba kolumn macierzy B,
  // T — wybrany krok całkowania,
  // eps — górna granica błędu przybliżenia macierzy F i G1,
  // EpsR — błąd wyznaczenia największej co do modułu wartości
  //      własnej macierzy F
var
  K, Error: Integer;
  S, S1, NormAT, teta, MWA: TFloat;
  AX, AY, at, BX, BT: TMatrixF;
begin
  Result := 0;
  SetLength(at, N + 1,N + 1);
  SetLength(AX, N + 1,N + 1);
  SetLength(BX, N + 1,N + 1);
  SetLength(AY, N + 1,N + 1);
  SetLength(BT, N + 1,W + 1);
  try
    mMulR(at, A, T);
    mOne(AX);
    NormAT := mNorm(at);
    K    := 0;
    S    := 1;
    S1   := 1;
    teta := NormAT / (1 - NormAT);
    mClone(F, AX);
    mClone(BX, AX);
    repeat
      Inc(K);
      mMul(AY, AX, at);
      S := S / K;
      mMulr(AX, AY, S);
```

```
        mAdd(F, F, AX);
        S1 := S1 / (K + 1);
        mMulr(AX, AY, S1);
        mAdd(BX, BX, AX);
        mClone(AX, AY);
        teta := teta * NormAT / (K + 1)
      until teta < eps;
      Error := mEigenValue(MWA, F, EpsR, 1000);
      if MWA >= 1.05 then
        Result := 16;
      if Error <> 0 then
        Result := 17;
      mMulr(BT, B, T);
      mMul(G1, BX, BT);
    finally
      at := nil;
      BT := nil;
      AX := nil;
      BX := nil;
      AY := nil;
    end
  end{FmTemp1 };
```

6.1.2. Wymuszenie aproksymowane funkcjami przedziałami liniowymi

Zakładamy, że wymuszenie $\mathbf{u}(t)$ jest funkcją ciągłą przedziałami liniową taką, że:

$$\mathbf{u}(\tau) = \mathbf{u}(kT) + \frac{1}{T}\left[\mathbf{u}\left((k+1)T\right) - \mathbf{u}(kT)\right](\tau - kT) = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2\tau \tag{6.34}$$

dla

$$kT \le \tau < (k+1)T, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

gdzie:

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{u}(kT) - k\left[\mathbf{u}\left((k+1)T\right) - \mathbf{u}(kT)\right]; \quad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{T}\left[\mathbf{u}\left((k+1)T\right) - \mathbf{u}(kT)\right]. \tag{6.34a}$$

Wykonując w takim przypadku całkowanie przez części w równaniu różnicowym (6.18) z uwzględnieniem wzoru (6.8), otrzymuje się:

$$\int_{kT}^{(k+1)T} e^{\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau = -\mathbf{A}^{-1}e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\left(\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2\tau\right)\Big|_{kT}^{(k+1)T} + \int_{kT}^{(k+1)T}\mathbf{A}^{-1}e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{f}_2 d\tau =$$

$$= \mathbf{A}^{-1}e^{-\mathbf{A}kT}\left\{\left[\mathbf{B} + \mathbf{A}^{-1}\left(e^{-\mathbf{A}kT} - \mathbf{1}\right)\mathbf{B}\frac{1}{T}\right]\mathbf{u}(kT) + \right.$$

$$\left. + \left[e^{-\mathbf{A}T}\mathbf{B} - \mathbf{A}^{-1}\left(e^{-\mathbf{A}T} - \mathbf{1}\right)\mathbf{B}\frac{1}{T}\right]\mathbf{u}(k+1)T\right\}.$$

Po uwzględnieniu powyższego wyniku całkowania oraz oznaczenia (6.32) równanie różnicowe (6.18) przyjmie postać:

$$\mathbf{x}(k+1) = e^{\mathbf{A}T}\mathbf{x}(\mathrm{k}) + \mathbf{A}^{-1}\left[e^{\mathbf{A}T} - \left(e^{\mathbf{A}T} - \mathbf{1}\right)\mathbf{A}^{-1}\frac{1}{T}\right]\mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \\ + \mathbf{A}^{-1}\left[\left(e^{\mathbf{A}T} - \mathbf{1}\right)\mathbf{A}^{-1}\frac{1}{T} - 1\right]\mathbf{B}\mathbf{u}(k+1)\,. \tag{6.35}$$

Uwzględniając wzory (6.30) i (6.29), równanie rekurencyjne (6.35) można przekształcić do postaci:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}_1\mathbf{u}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k+1), \tag{6.36}$$

gdzie:

$$\mathbf{G}_1 = \mathbf{A}^{-1}\left[e^{\mathbf{A}T} - \left(e^{\mathbf{A}T} - \mathbf{1}\right) - \mathbf{A}^{-1}\frac{1}{T}\right]\mathbf{B} = \left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathbf{A}T)^n}{n!(n+2)}\right](\mathbf{BT})\,; \tag{6.37}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{A}^{-1}\left[\left(e^{\mathbf{A}T} - \mathbf{1}\right)\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{1}\right]\mathbf{B} = \left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathbf{A}T)^n}{(n+2)!}\right](\mathbf{BT})\,, \tag{6.38}$$

natomiast macierz **F** wyraża się wzorem (6.30).

Równanie rekurencyjne (6.36) daje więc algorytm wyznaczania rozwiązania równania różniczkowego w postaci (6.2). W obliczeniach komputerowych należy zauważyć, że wyznaczanie macierzy **F**, $\mathbf{G}_1$ i **H** zgodnie ze wzorami (6.30), (6.37) i (6.38) należy prowadzić równolegle ze względu na wspólne elementy $(\mathbf{A}T)^n$ występujące w szeregach macierzowych tych wzorów, co minimalizuje liczbę operacji numerycznych. W przypadku stosowania wzoru rekurencyjnego (6.36) niezbędne jest wygenerowanie macierzy **F**, $\mathbf{G}_1$ i **H** (wzory (6.30), (6.37) i (6.38)), co można zrealizować w następującym bloku funkcyjnym:

```
function FmTemp2(var A, B, F, G2, H: TMatrixF; T, eps, EpsR: TFloat;
  N, W: Integer): Integer;
  // Formowanie macierzy pomocniczych F, G2, H:
  // A, B — macierze układu równań różniczkowych dX/dt = A*X+B*U,
  // N — rząd macierzy A i F,
  // W — liczba kolumn macierzy B, G2, H,
  // T — wybrany krok całkowania,
  // eps — górna granica błędu przybliżenia macierzy F, G2, H,
  // EpsR — błąd wyznaczenia największej co do modułu wartości
  //      własnej macierzy F
var
  K, Error: Integer;
  SS, S1, S2, NormAT, teta, MWA: TFloat;
  AX, AY, at, AG, AH, BT: TMatrixF;
begin
  Result := 0;
  SetLength(at, N + 1,N + 1);
  SetLength(AX, N + 1,N + 1);
  SetLength(AY, N + 1,N + 1);
  SetLength(AH, N + 1,N + 1);
  SetLength(AG, N + 1,N + 1);
  SetLength(BT, N + 1,W + 1);
```

```
  try
    mMulR(at, A, T);
    mOne(AX);
    NormAT := mNorm(at);
    K    := 0;
    SS   := 1;
    S1   := 0.5;
    S2   := 0.5;
    teta := NormAT / (1 - NormAT);
    mOne(F);
    mMulr(AG, AX, 0.5);
    mClone(AH, AG);
    repeat
      Inc(K);
      mMul(AY, AX, at);
      SS := SS / K;
      mMulr(AX, AY, SS);
      mAdd(F, F, AX);
      S1 := S1 * (K + 1) / ((K + 2) * K);
      mMulr(AX, AY, S1);
      mAdd(AG, AG, AX);
      S2 := S2 / (K + 2);
      mMulr(AX, AY, S2);
      mAdd(AH, AH, AX);
      mClone(AX, AY);
      teta := teta * NormAT / (K + 1)
    until teta < eps;
    Error := mEigenValue(MWA, F, EpsR, 1000);
    if MWA >= 1.05 then
      Result := 16;
    if Error <> 0 then
      Result := 17;
    mMulr(BT, B, T);
    mMul(G2, AG, BT);
    mMul(H, AH, BT);
  finally
    at := nil;
    BT := nil;
    AX := nil;
    AY := nil;
    AG := nil;
    AH := nil;
  end
end{FmTemp2 };
```